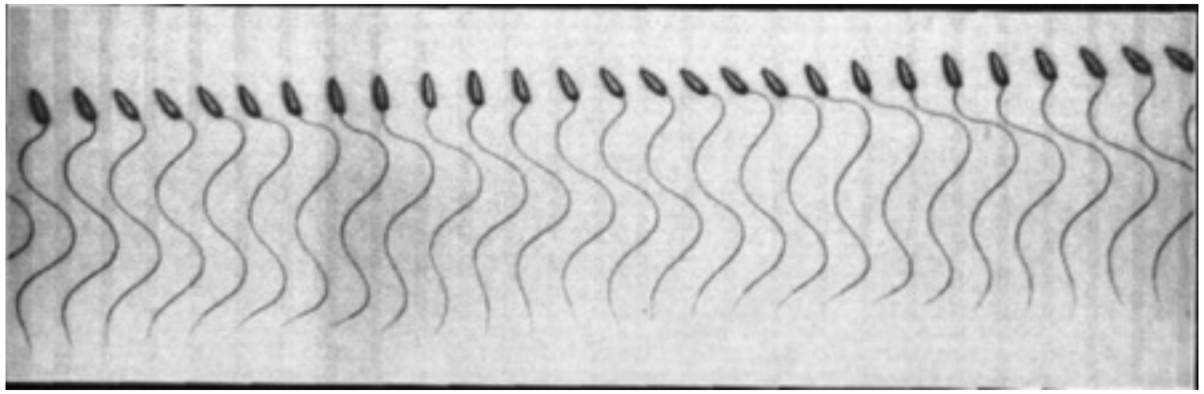
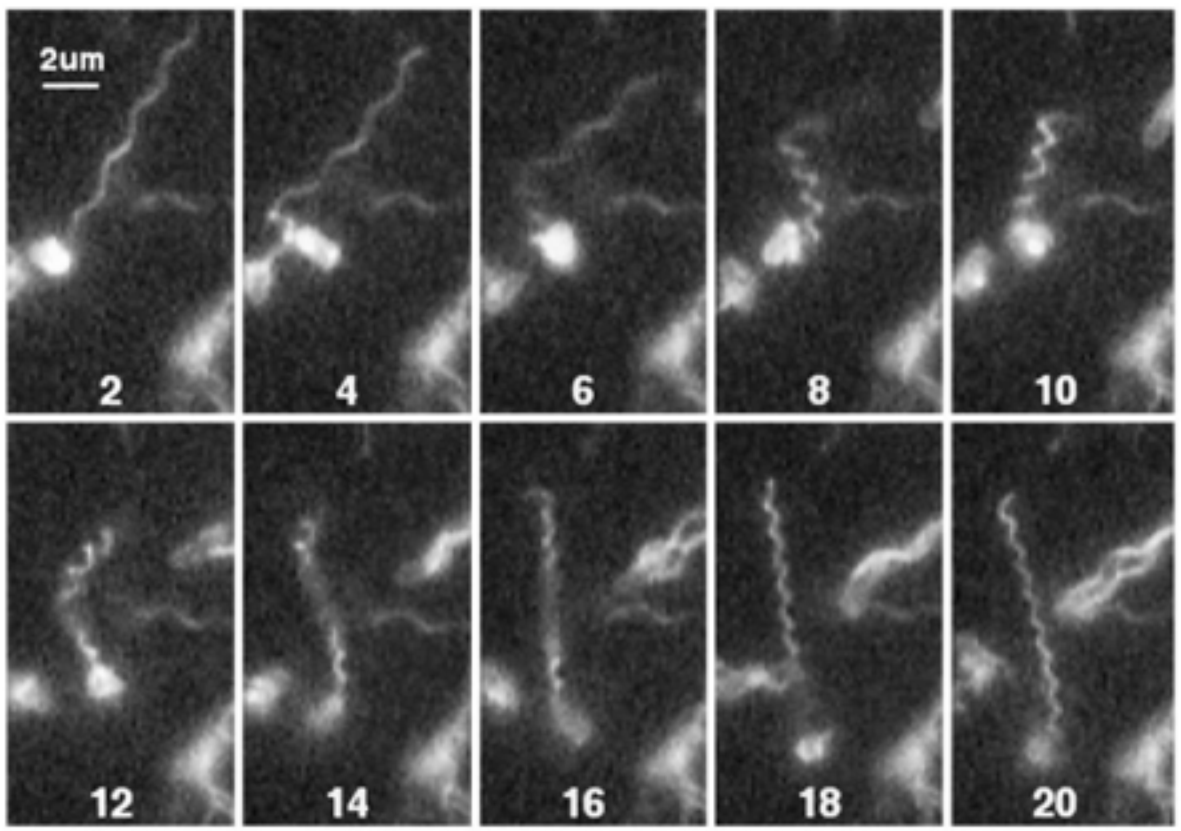
Sommaire

- microorganismes nageurs
  - bactéries
    - la nage d'E. Coli, motorisation
    - autres bactéries
  - eukaryotes
    - organismes unicellulaires mono et biflagellés
    - tapis de cils
    - structure et motorisation des cils et flagelles
- hydrodynamique à Re=0
  - les contraintes de l'absence d'inertie
  - hydrodynamique des cils et flagelles
- interactions
  - interactions entre cils, synchronisation
  - interactions avec une paroi, pompes biologiques microscopiques
  - interactions entre nageurs, comportements collectifs
- systèmes artificiels
  - viscosité et élasticité
  - micronageurs magnétiques

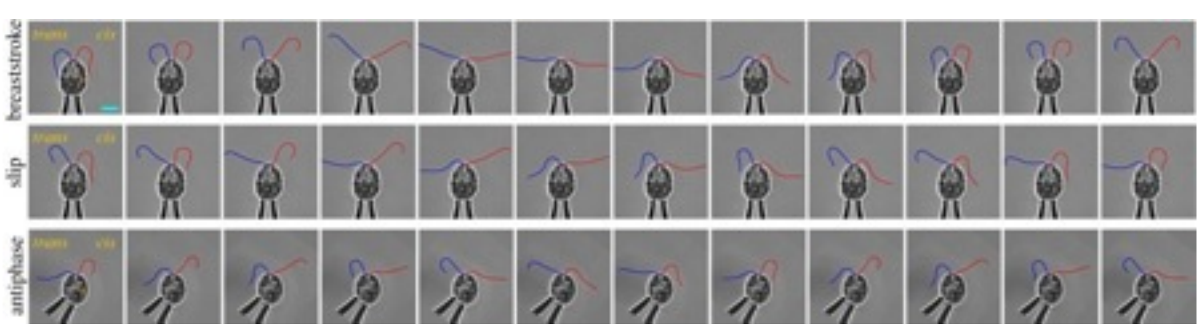
ESPCI ParisTech



Propulsion par une onde propagative



Rotation d’une hélice



Ondulations de cils

Re=0 et l'équation de Stokes

$$\cancel{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}$$

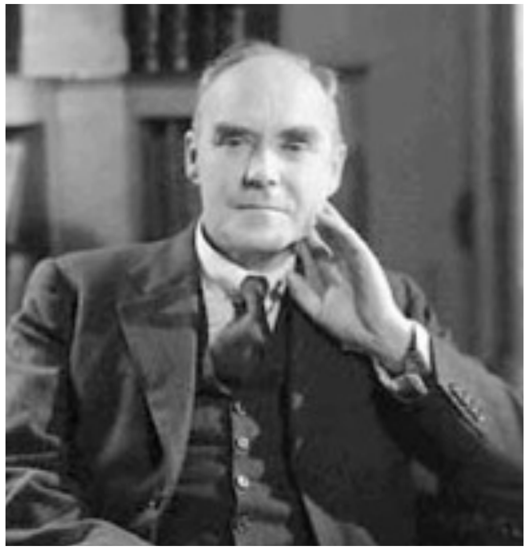
$$\eta\Delta\mathbf{u} = \nabla p$$

Linéarité : superposition des solutions ; si ($\mathbf{u}$,p) solution, k($\mathbf{u}$,p) est aussi solution

Pas de dépendance en temps

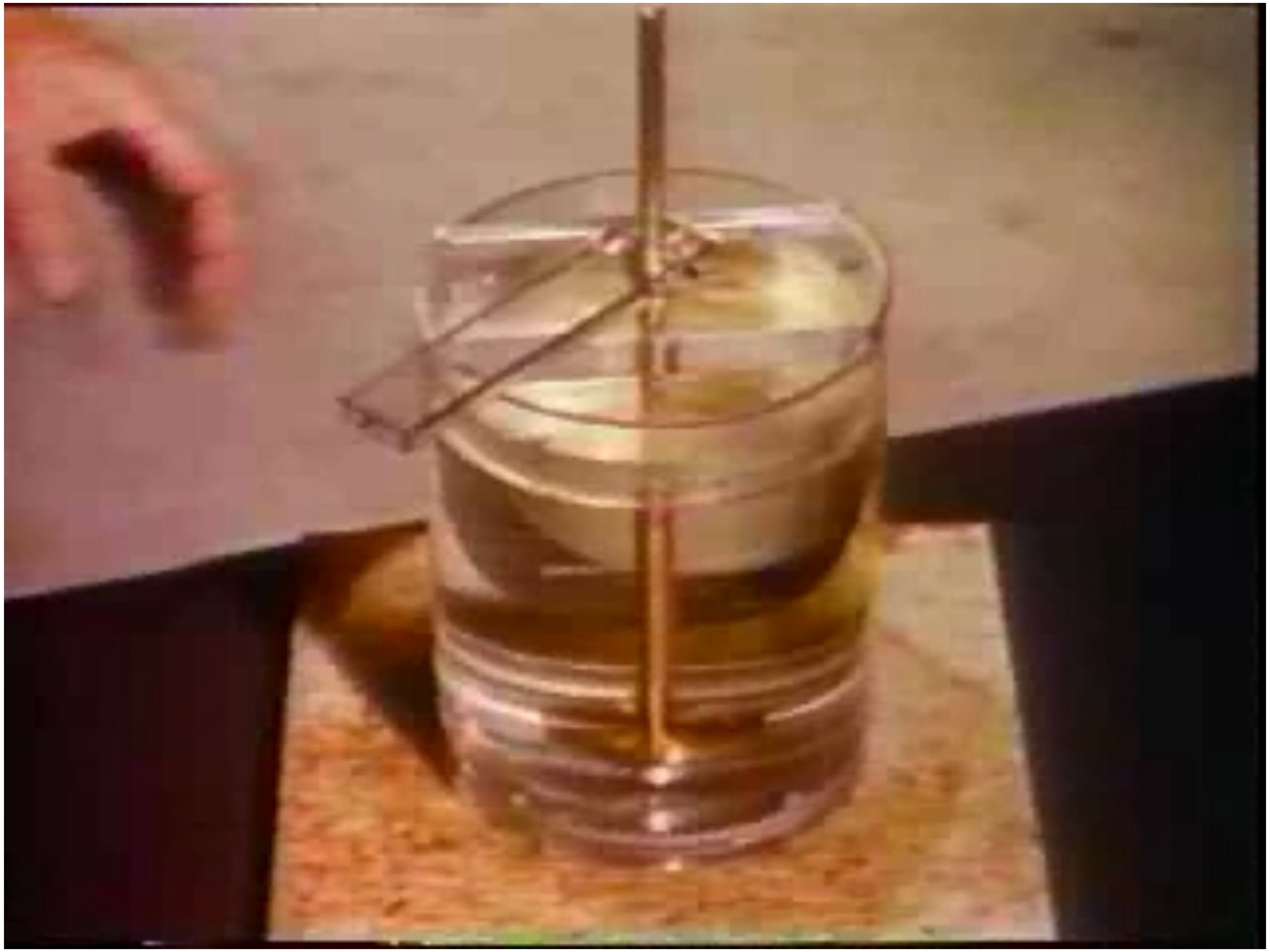
Unicité de la solution pour des conditions aux limites fixées

Comment faire sans inertie ?

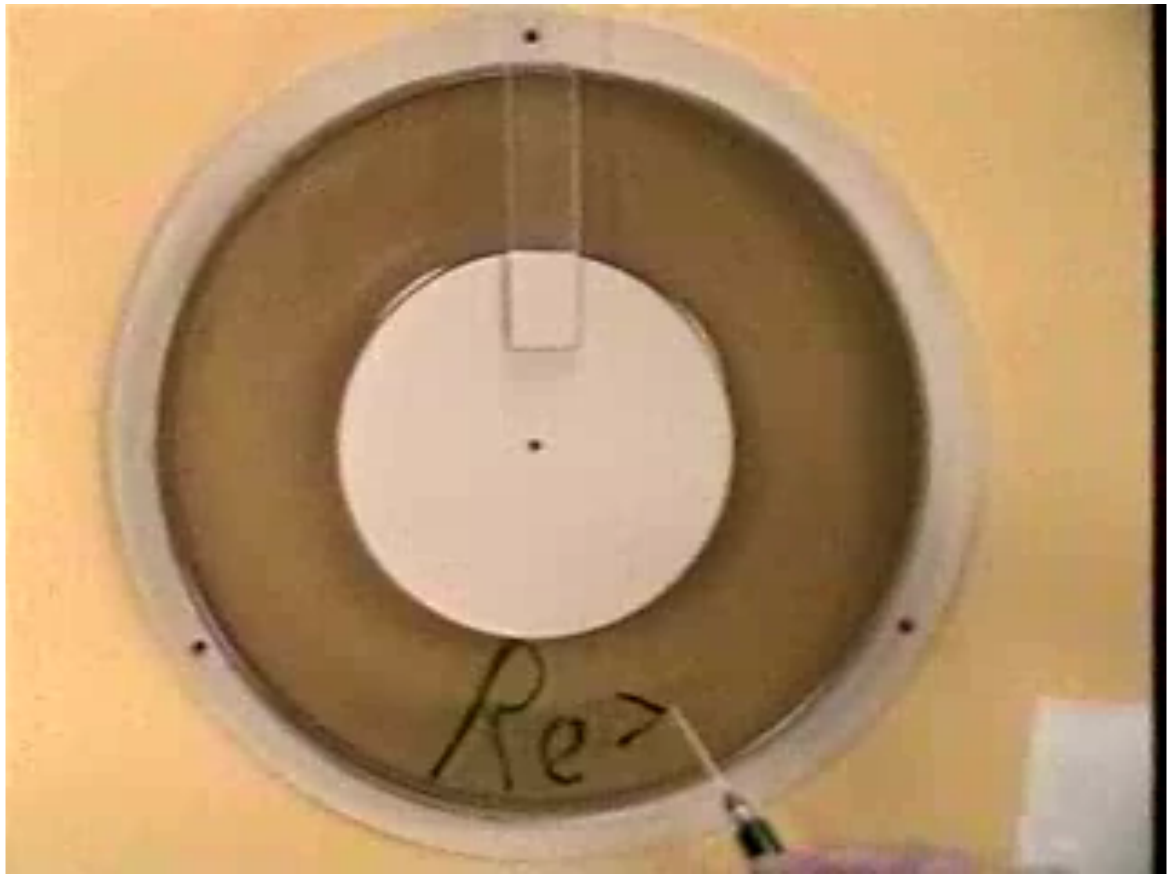


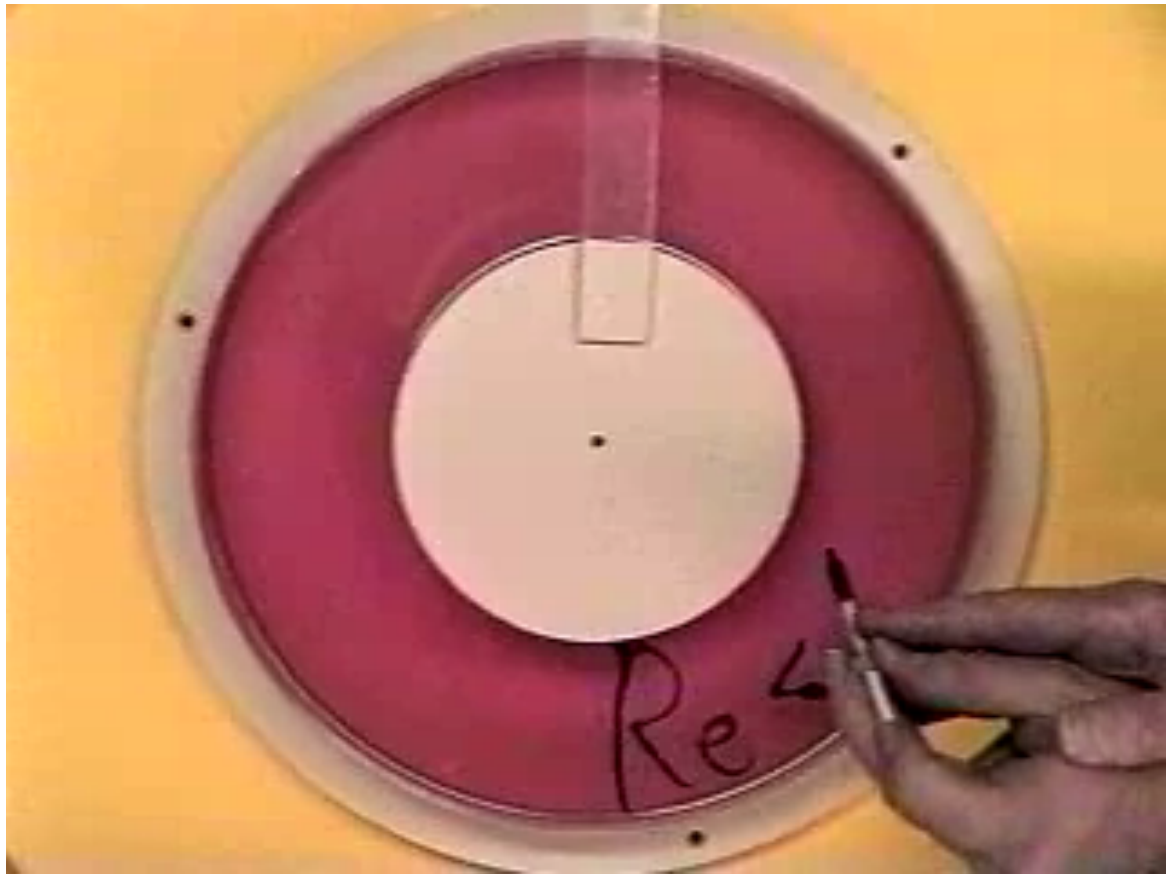
Film G.I. Taylor, « Low Reynolds number flows », NCFMF

Réversibilité cinématique



Réversibilité et irréversibilité cinématiques

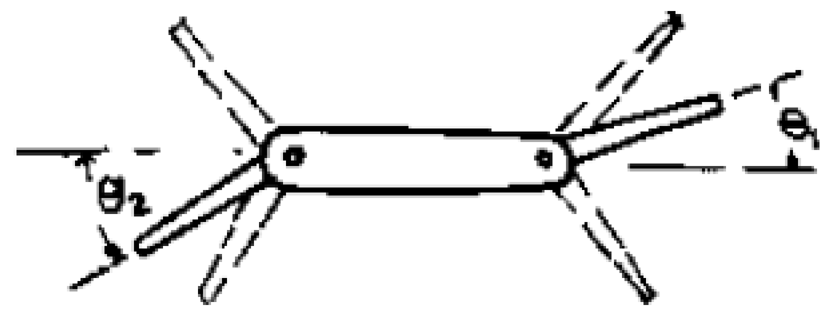




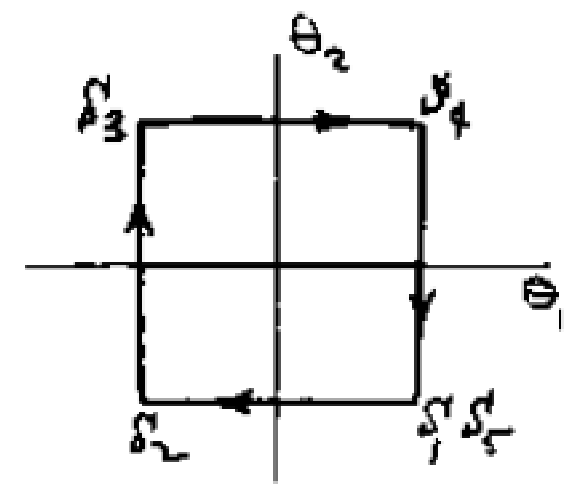
ESPCI ParisTech

Le théorème de la coquille St Jacques

1 seul degré de liberté :
réversibilité imposée

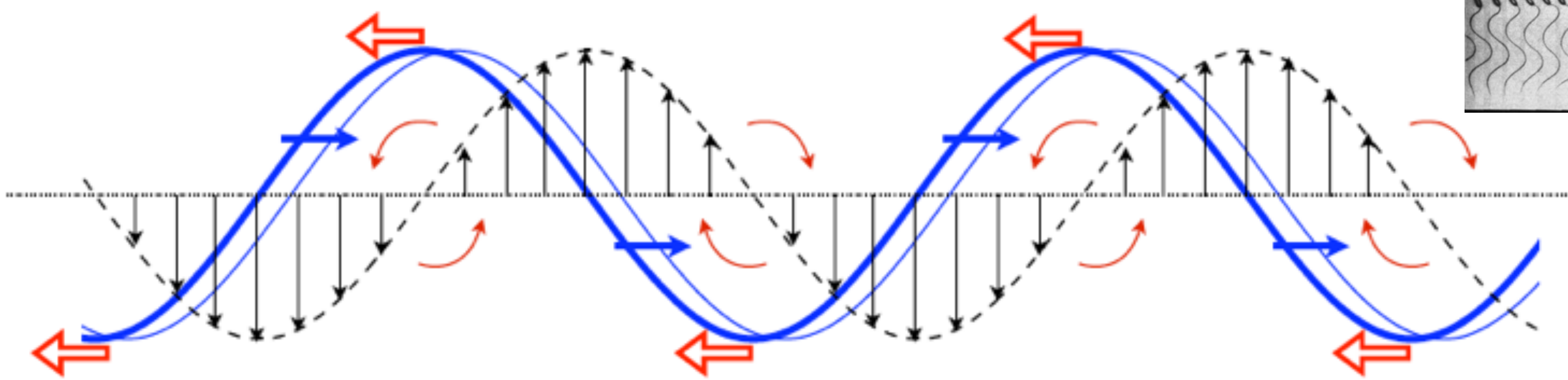


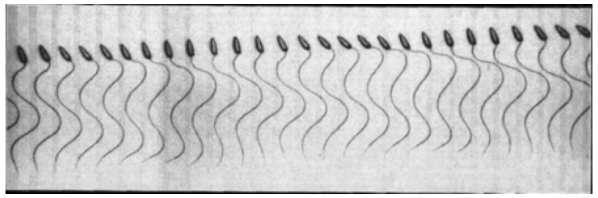
2 degrés de liberté :
possibilité de briser la
symétrie +t/-t



E. Purcell, life at low
Reynolds number

Un problème 2D simple : nage d'une feuille ondulante





$$\zeta = b\sin(kx - \omega t)$$

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

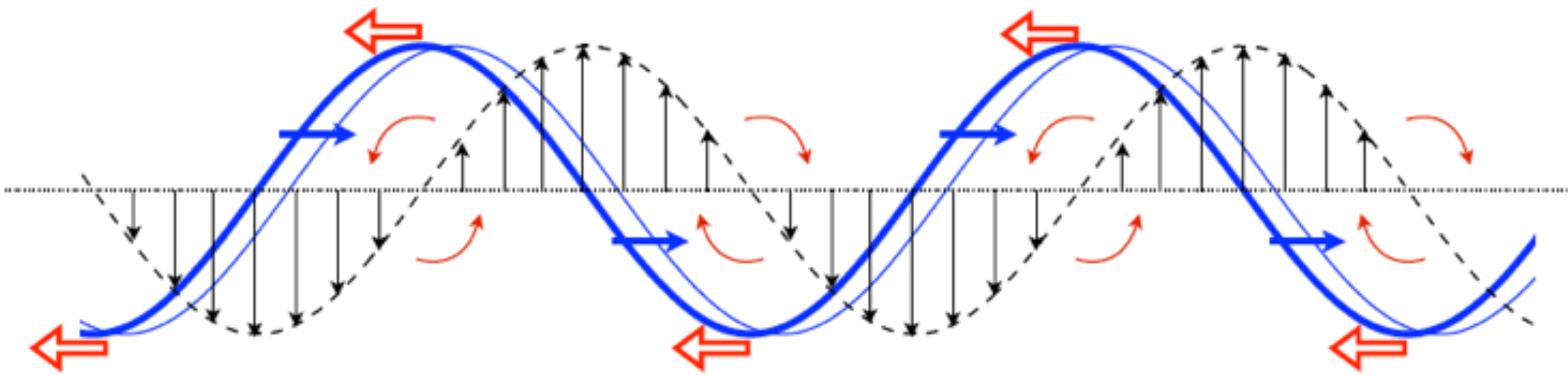
Fonction de courant

$$\nabla^4 \Psi = 0$$

$$\Psi = (A_1 y + B_1)e^{-ky}\cos(kx - \omega t) - Vy$$

GI Taylor, Analysis of the swimming of microorganisms, Proc. Roy. Soc. A 209 447 (1951)

Nage d'une feuille ondulante



au premier ordre en amplitude V = 0

au second ordre en amplitude $$V = -\,\omega k b^2$$

$$\frac{V}{v_\phi} = -k^2 b^2$$

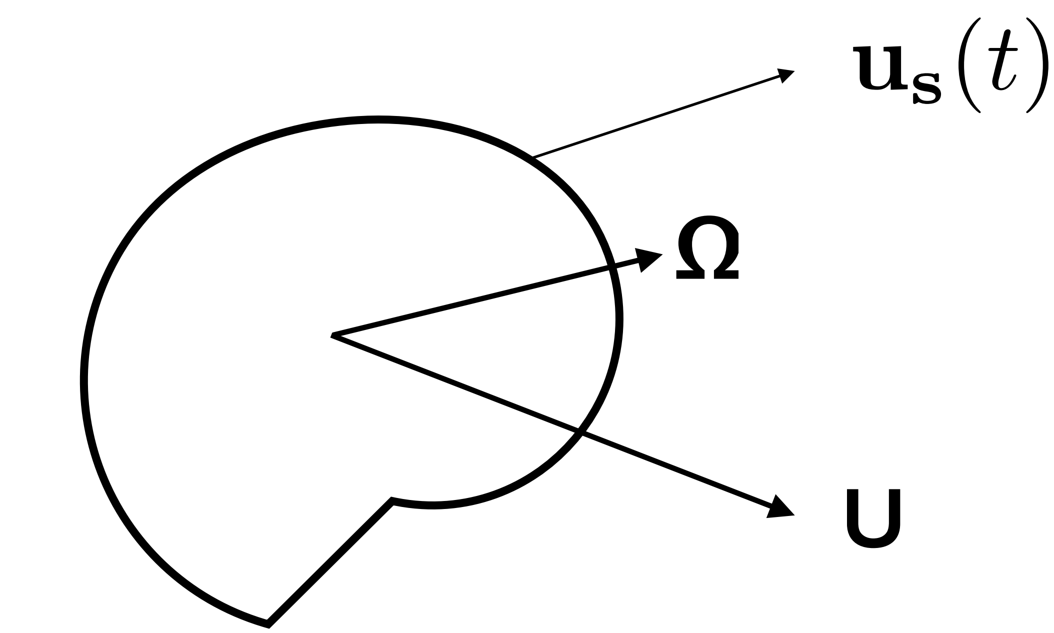
Force et couple sur un objet en mouvement

Pas d'inertie $\qquad \Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{\Gamma} = 0$

Force Hydrodynamique + Force extérieure = 0

Couple Hydrodynamique + Couple extérieur = 0

Le problème du nageur



$\mathbf{u_s}(t)$ donné sur la surface
trouver **U** et **Ω** satisfaisant **F**=0 et **G**=0

$$\mathbf{u} = \mathbf{u_s} + \mathbf{U} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$$

$$\int_S \mathbf{u_1}.\sigma_\mathbf{2}.\mathbf{n}\ dS = \int_S \mathbf{u_2}.\sigma_\mathbf{1}.\mathbf{n}\ dS \qquad \int_S \hat{u}\sigma\ dS = \int_S u\hat{\sigma}\ dS$$

Théorème de réciprocité

$$\hat{U}\int_S \sigma\ dS = 0 = \int_S (u_s + U)\hat{\sigma}\ dS$$

$\mathbf{u}, \sigma$	$\hat{\mathbf{u}}, \hat{\sigma}$
$\mathbf{U}, \Omega$	$\hat{\mathbf{U}}, \hat{\Omega}$
0,0	$\hat{\mathbf{F}}, \hat{\Gamma}$

$$U\int_S \hat{\sigma}\ dS = -\int_S u_s\hat{\sigma}\ dS$$

$$U.\hat{F} = -\int_S u_s\hat{\sigma}\ dS$$

Force et couple sur un objet en mouvement

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B^T} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Omega} \end{pmatrix}$$

matrice de résistance

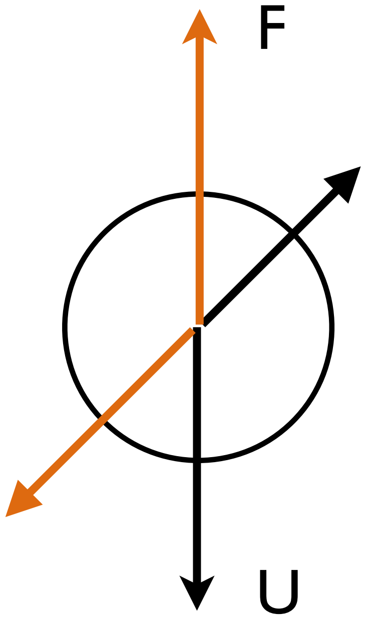
$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N^T} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{\Gamma} \end{pmatrix}$$

matrice de mobilité

$$\eta \Delta \mathbf{u} = \nabla p \qquad F \propto \eta U L \qquad A \propto \eta L \qquad M \propto \frac{1}{\eta L}$$

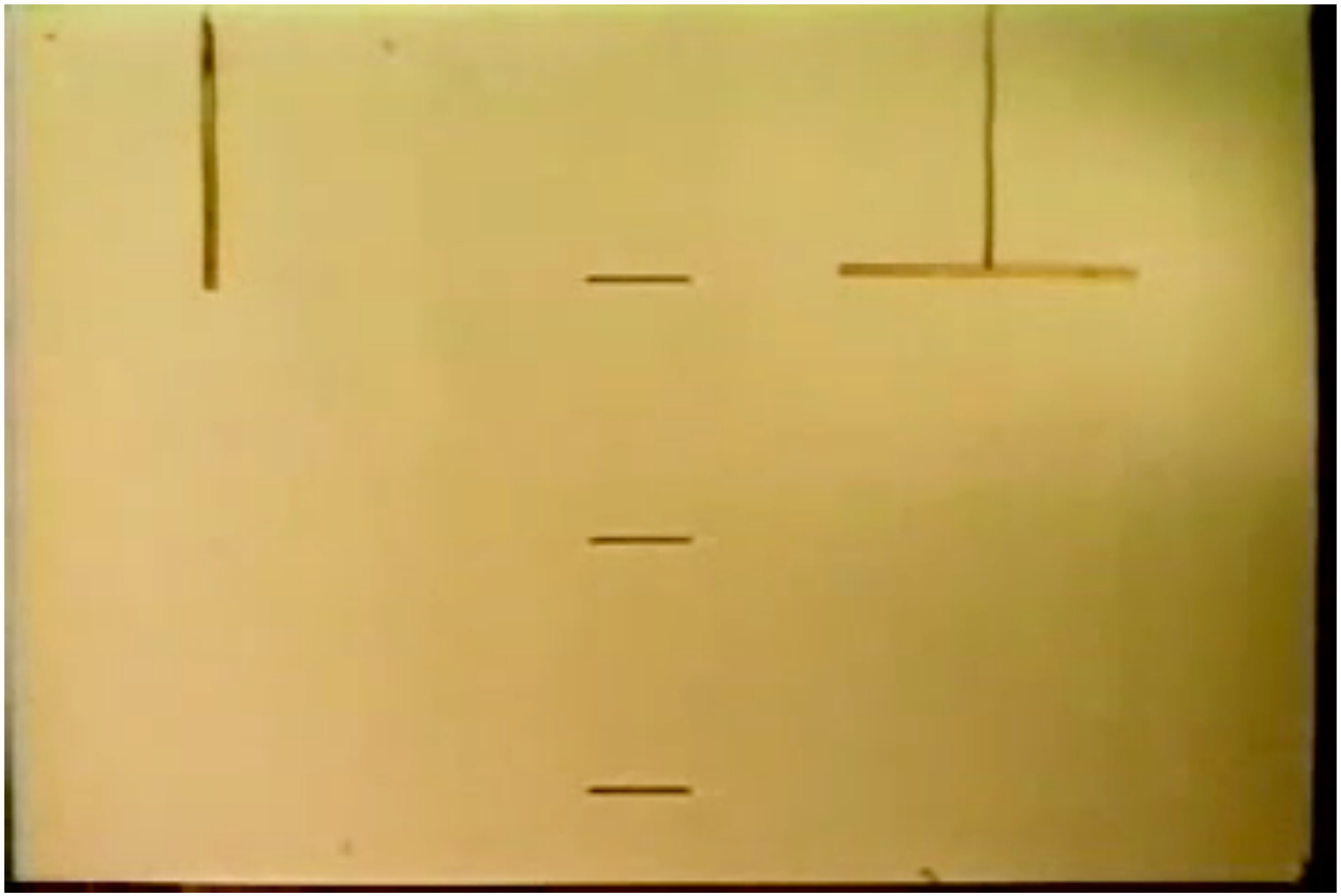
$$C \propto \eta L^3 \qquad \mathbf{O} \propto \frac{1}{\eta L^3}$$

Matrice de résistance pour une sphère



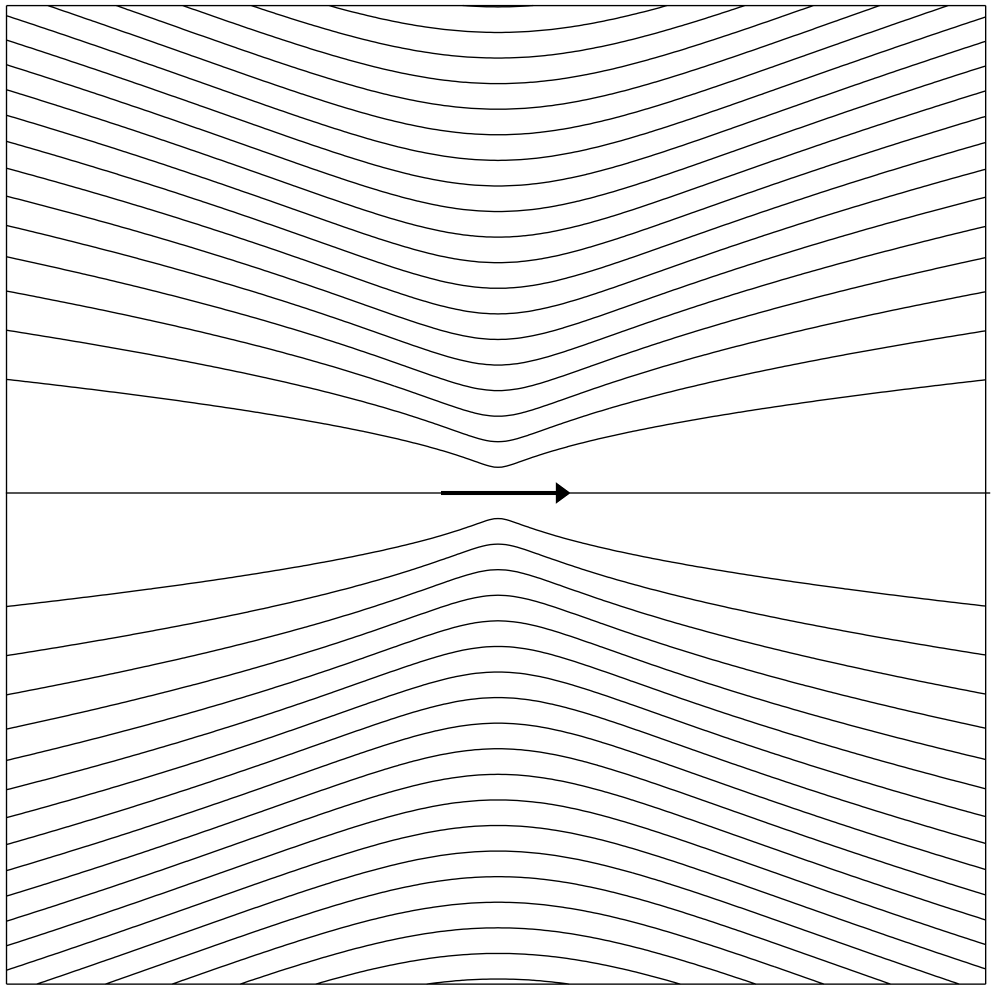
$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\pi\eta a\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 8\pi\eta a^3\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Omega} \end{pmatrix}$$

Mobilité d'un objet très anisotrope



Film «Low Reynolds number flows» sur www.mit.edu/

Stokeslet, solution fondamentale de l'éqn. de Stokes

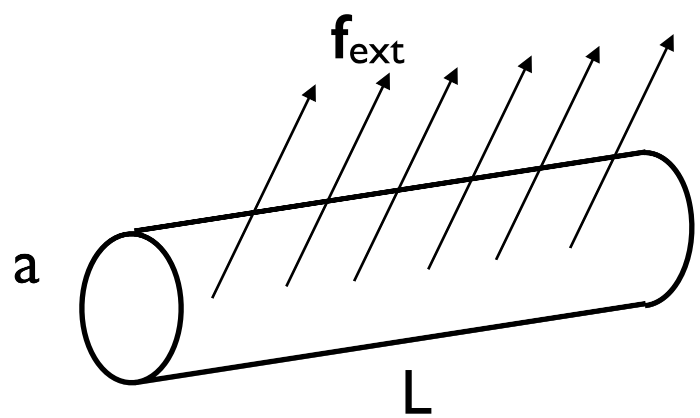


$$S_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{\hat{x}_i \hat{x}_j}{r^3}$$

$$u_i = \frac{1}{8\pi\eta} S_{ij} f_j$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u} = \frac{f}{8\pi\eta r} \begin{pmatrix} 1 + \frac{x^2}{r^2} \\ \frac{xy}{r^2} \\ \frac{xz}{r^2} \end{pmatrix} \propto \frac{f}{8\pi\eta r} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Force sur un batonnet très allongé

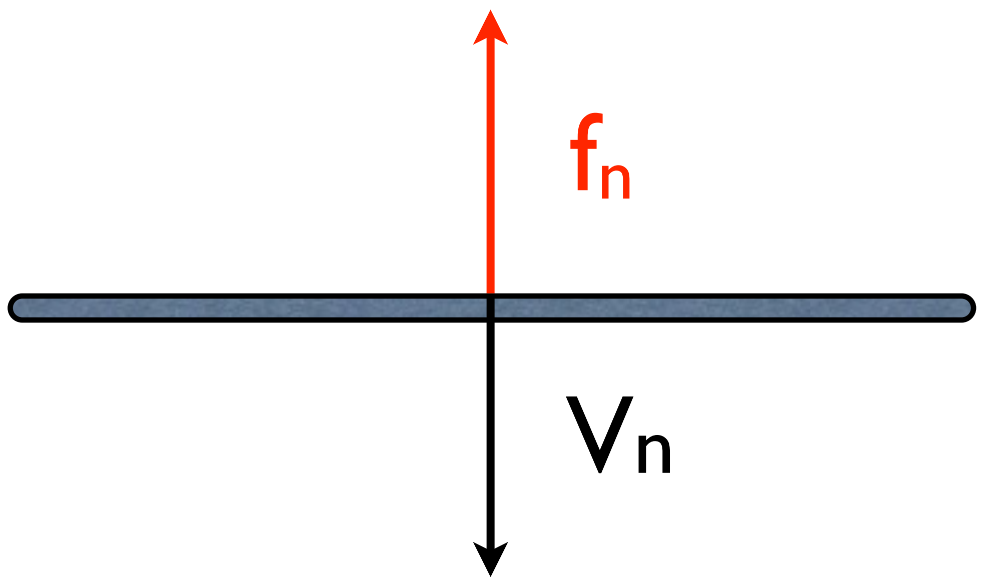


L >> a

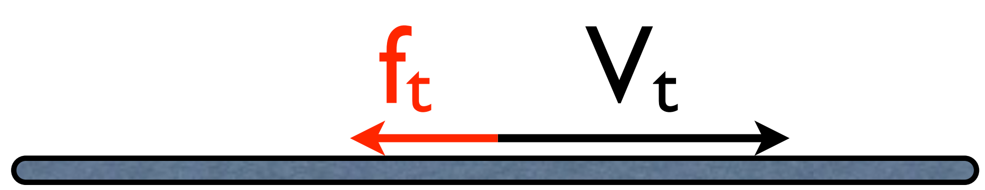
$$\mathbf{u}_j(x) = \frac{1}{8\pi\eta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j)}(\mathbf{I}+\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x).\mathbf{F}_{ext}/N$$

$$\mathbf{u} = \frac{\ln(L/a)}{4\pi\eta L}(\mathbf{I}+\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x).\mathbf{F}_{ext}$$

Forces normale et tangentielle sur un batonnet

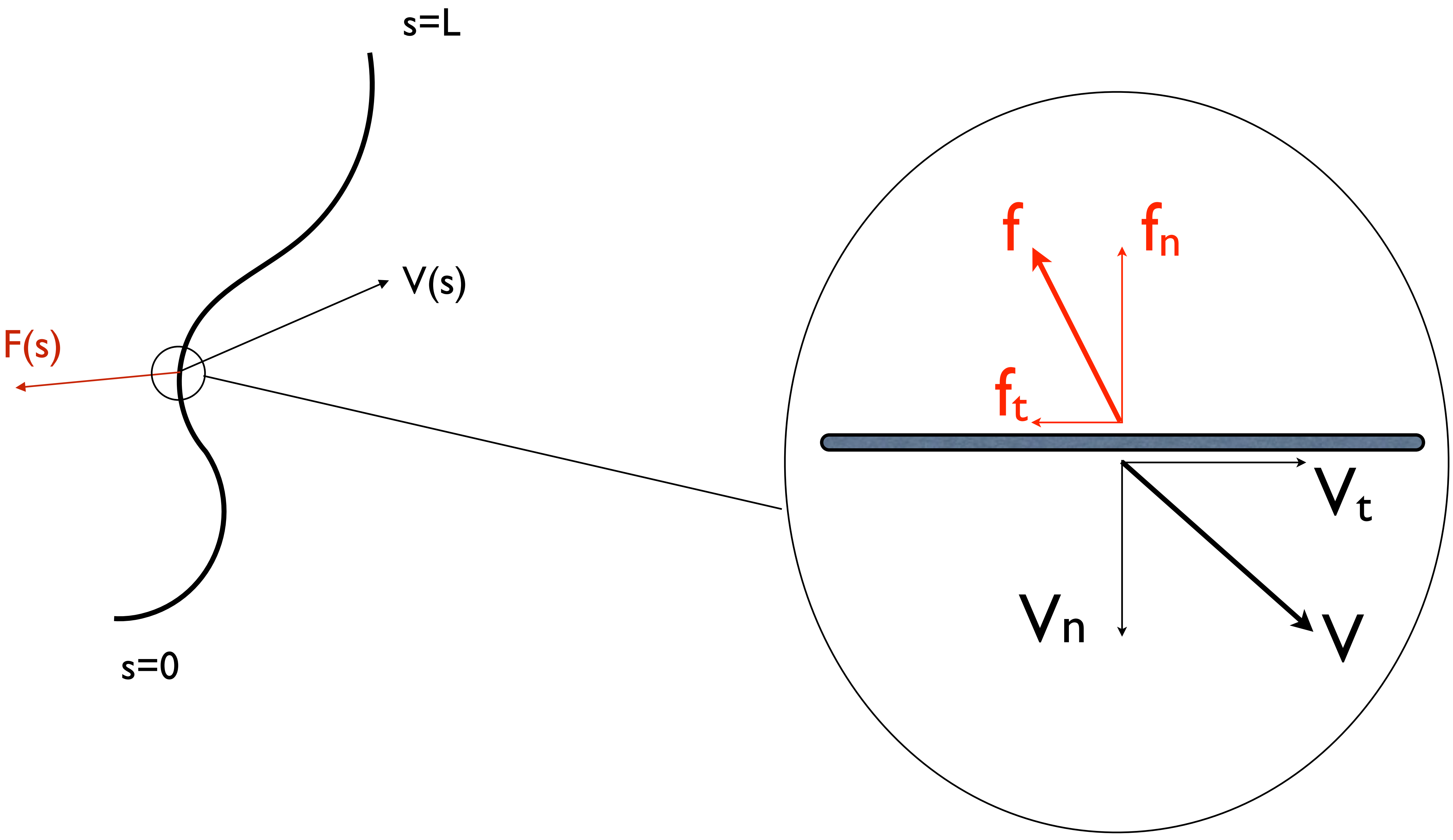


$$f_n = \zeta_n V_n \propto 4\pi\eta L V_n$$



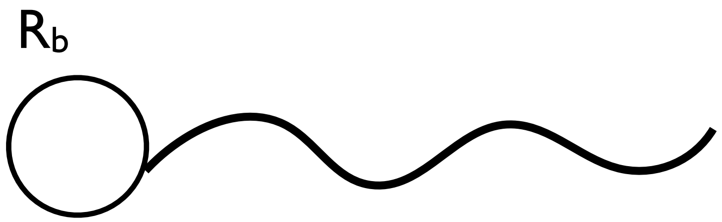
$$f_t = \zeta_t V_t \propto 2\pi\eta L V_t$$

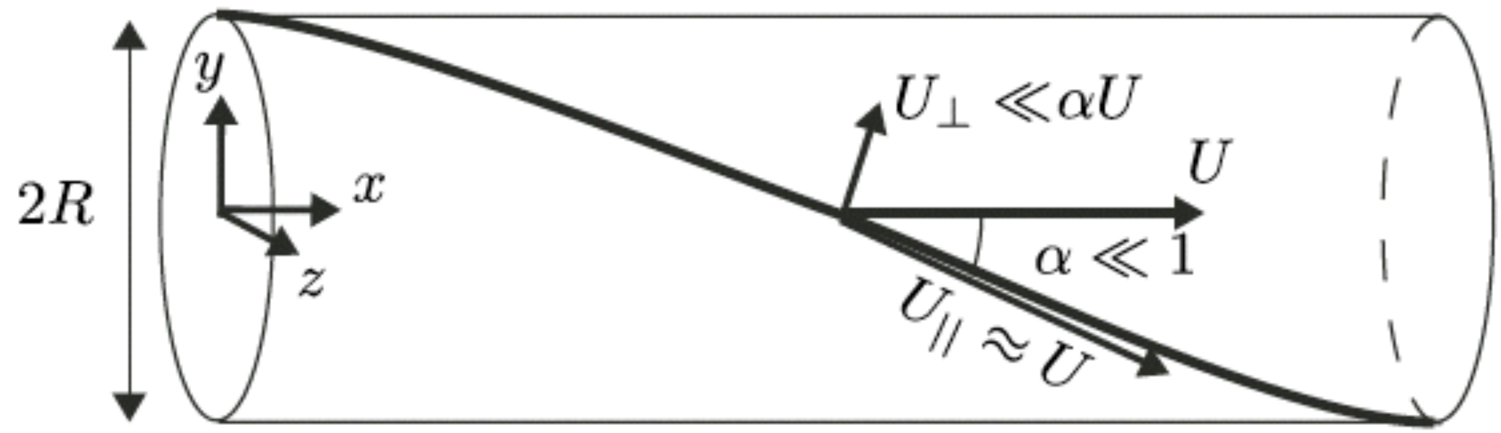
« Resistive force theory »



Ignore les interactions hydrodynamiques d'un point à l'autre du cil

Corps propulsé par une hélice





$$A \approx \zeta_\| L$$

$$C \approx \zeta_\perp R^2 L$$

$$B \approx -(\zeta_\perp - \zeta_\|)\alpha R L$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B^T} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Omega} \end{pmatrix}$$

Equilibre global des forces et des moments

$$F = -\zeta_0 R_b U$$

$$\Gamma = -\zeta_r R_b^3 \Omega_b$$

$$U \approx \alpha \frac{\zeta_\perp - \zeta_\|}{\zeta_\|} \left(\frac{\zeta_r}{\zeta_\perp}\right) \left(\frac{R_b^3}{RL}\right) \Omega_m$$