



LA PHYSIQUE DE LA FRACTURE

RÉVÉLÉE PAR SES INSTABILITÉS

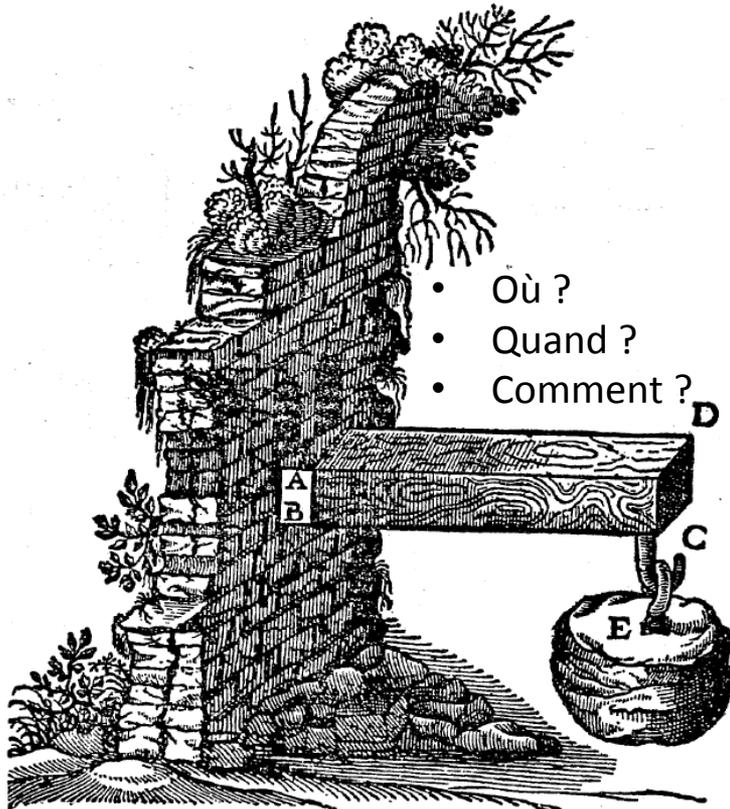
Tristan Baumberger

Institut des nanosciences de Paris

# QUEL-EST LE SUJET DE CE COURS ?

« Je plie, et ne romps pas [...] », JEAN DE LA FONTAINE, *Le chêne et le roseau*

Fracture = mode de rupture **localisée** d'un solide contraint



- Où ?
- Quand ?
- Comment ?

Fig. 17

*Scienza nuova prima, intorno alla resistenza de i corpi solidi all'essere spezzati.*

G. GALILEI, *Discorsi[...] intorno a due nuove Scienze* (1638)

*Trois approches complémentaires...*



- **L'INGÉNIEUR**  
→ know how, critères opérationnels (charge maximale, marge de sécurité, ...)

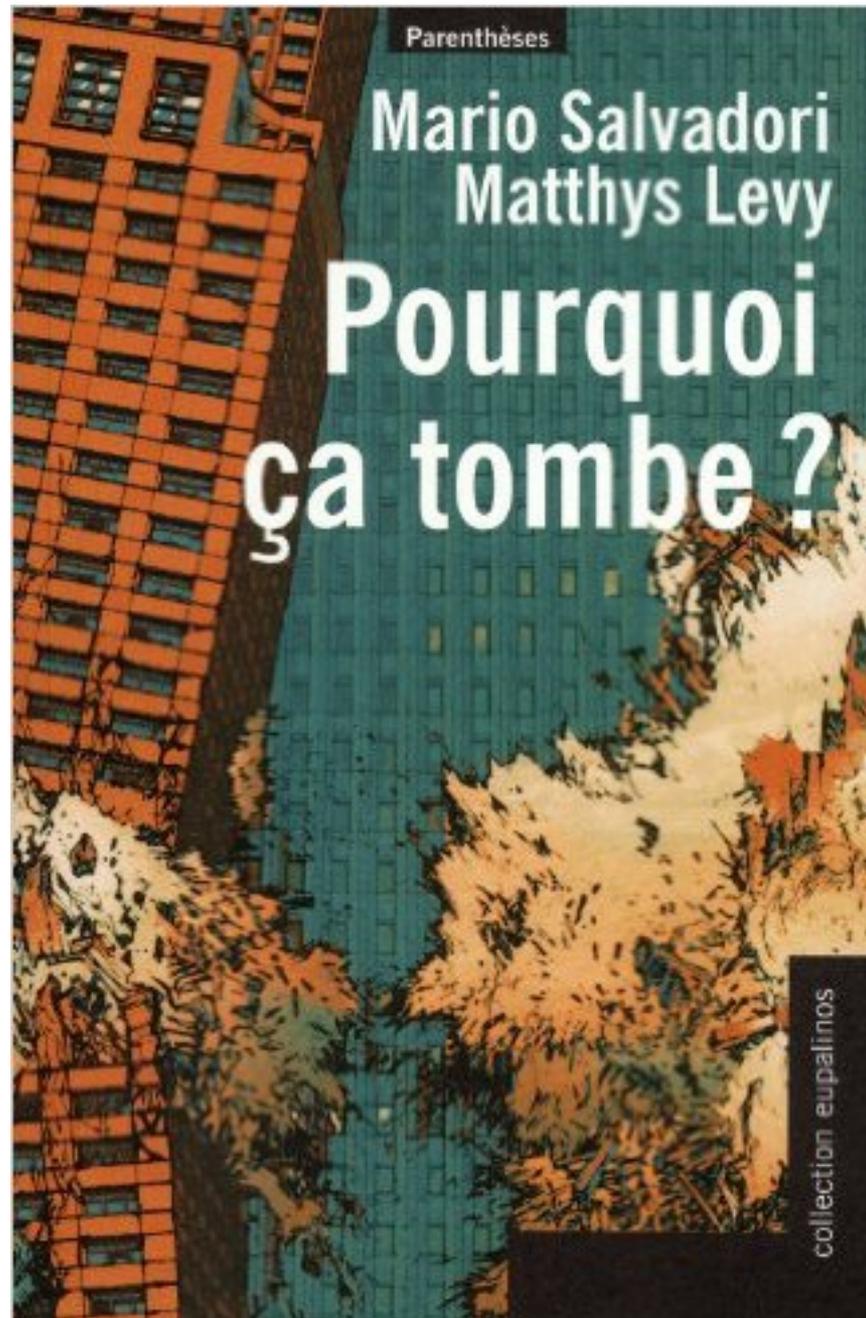


- **LE MÉCANICIEN**  
→ théorie, outils mathématiques



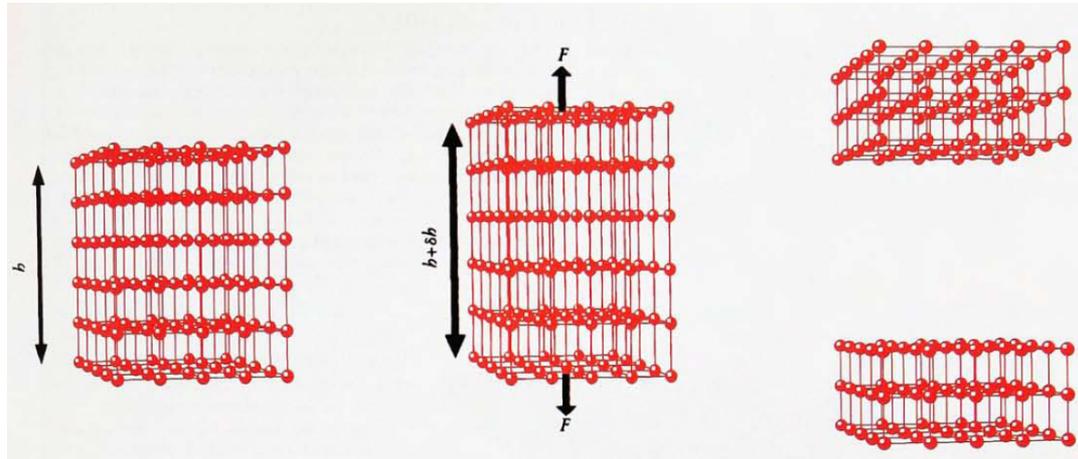
- **LE PHYSICIEN**  
→ systèmes modèles, lois d'échelles  
→ problèmes analogues (instabilités, systèmes à frontière libre, nucléation croissance, ...)

Paradoxe #1

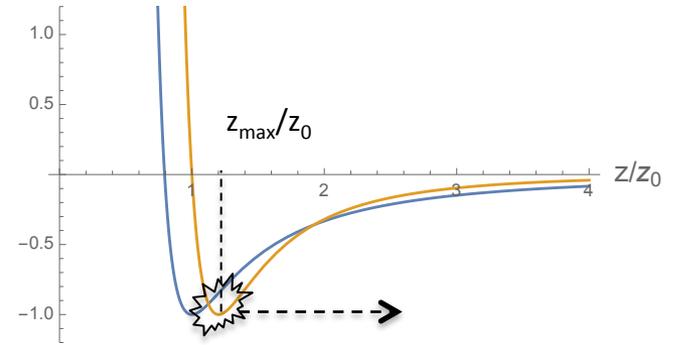


# RÉSISTANCE « THÉORIQUE » D'UN SOLIDE ATOMIQUE

[M. Marder & J. Fineberg]



— potentiel d'interaction/aire entre ½ espaces  
— contrainte interne



Hyp. : décohésion lorsque la *contrainte*  $\sigma > \sigma_{\max}$  (i.e. la *déformation*  $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$ )

$$\varepsilon_{\max} = \delta h_{\max} / h = z_{\max} / z_0 - 1 \approx 20 \%$$

$$\sigma_{\max} = E \varepsilon_{\max} \approx E/5$$

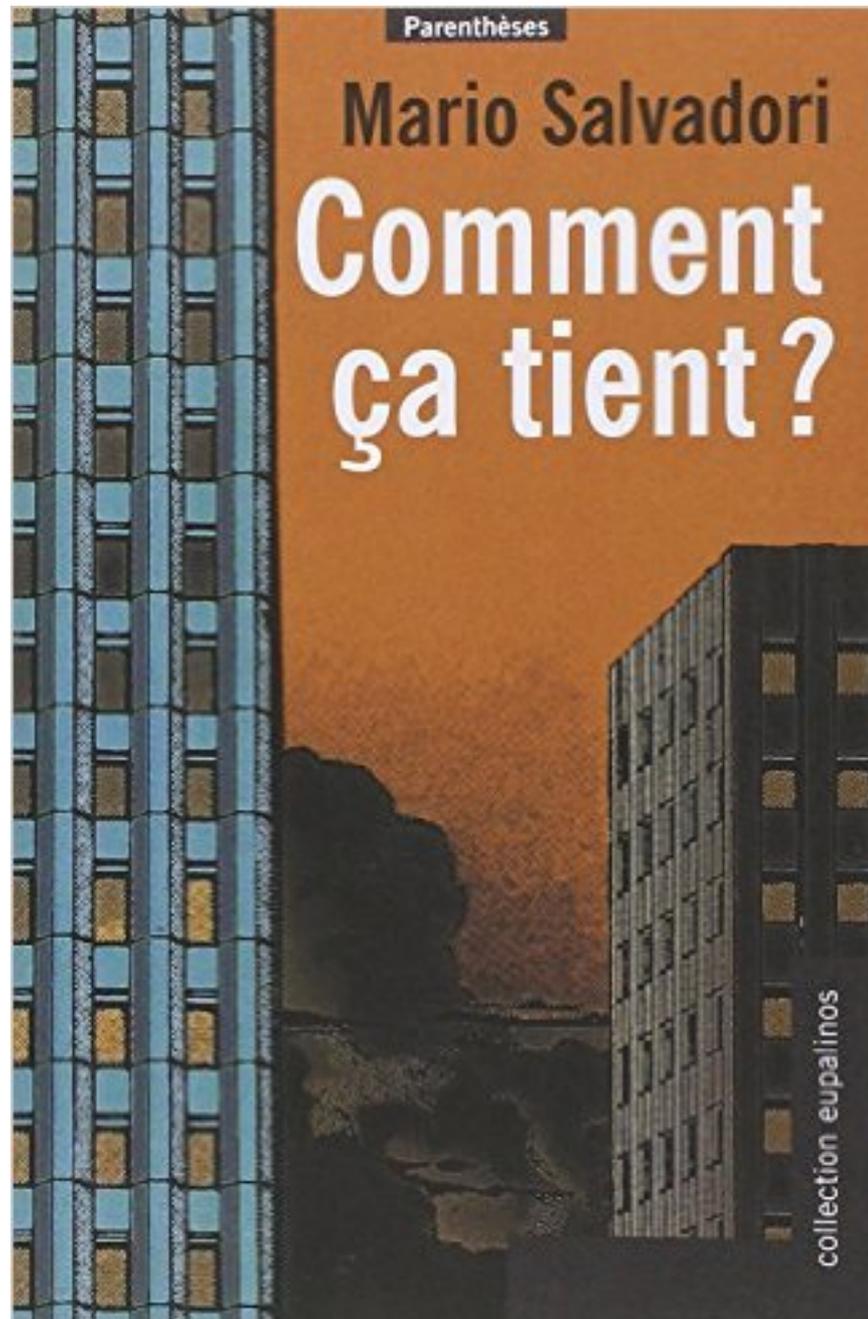
$$\approx U_0 / a^3 !$$

Material	Young's modulus (GPa)	Theoretical strength (GPa)	Practical strength (GPa)	Practical/theoretical strength
Iron	195–205	43–56	0.3	0.006
Copper	110–130	24–55	0.2	0.005
Titanium	110	31	0.3	0.009
Silicon	110–160	45	0.7	0.01
Glass	70	37	0.4	0.01
Plexiglas	3.6	3	0.05	0.01

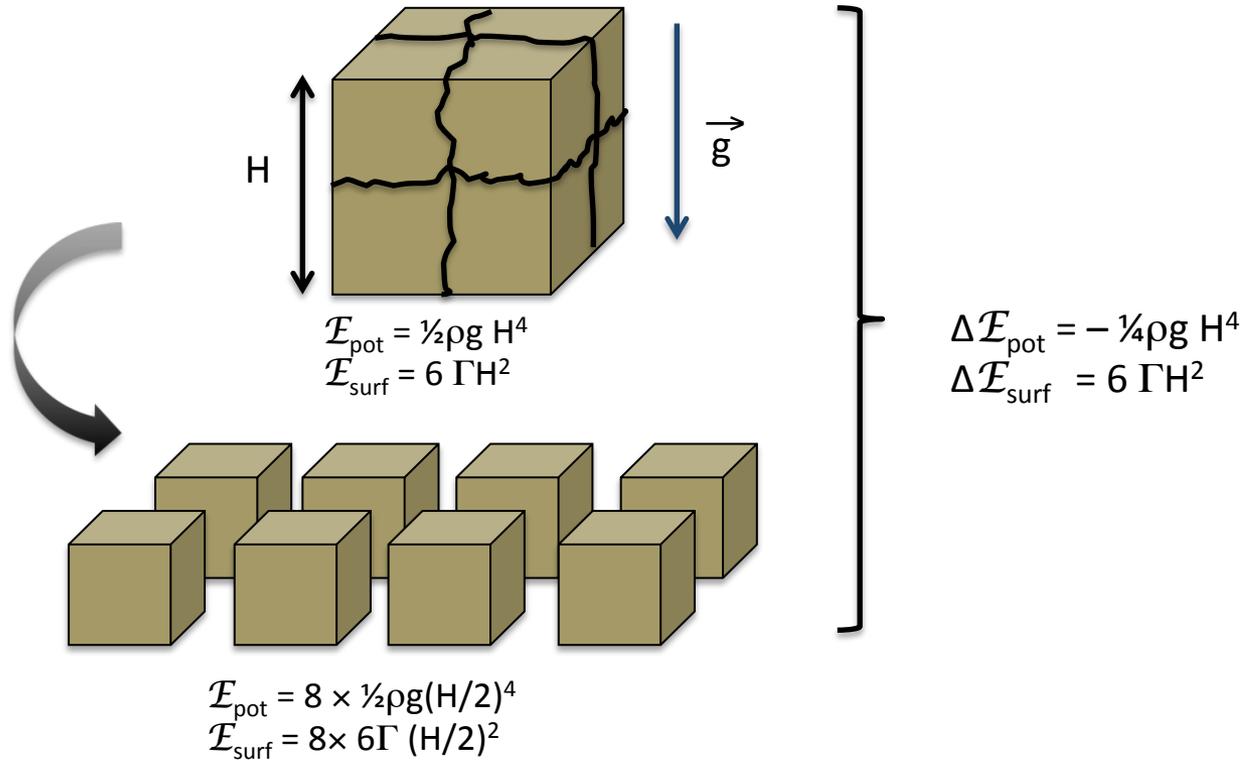
→ pour les solides atomiques,

*cette estimation est trop élevée de plusieurs ordres de grandeur !*

Paradoxe #2



# BILAN ÉNERGÉTIQUE VOLUME/SURFACE

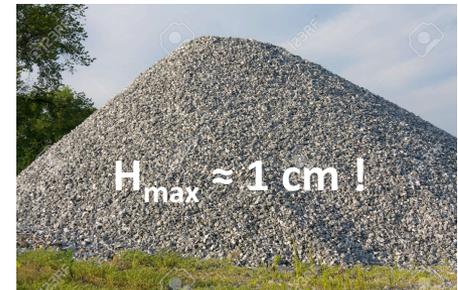


→ l'émiettement semble énergétiquement favorable tant que  $|\Delta \mathcal{E}_{\text{pot}}| > 6 \Gamma H^2$

$$\Rightarrow H_{\text{max}} = \sqrt{24 \frac{\Gamma}{\rho g}}$$

$$\rho \approx 10^4 \text{ kg/m}^3$$

$$\Gamma \approx 1 \text{ eV}/(10 \text{ \AA}^2) = 1 \text{ J/m}^2$$



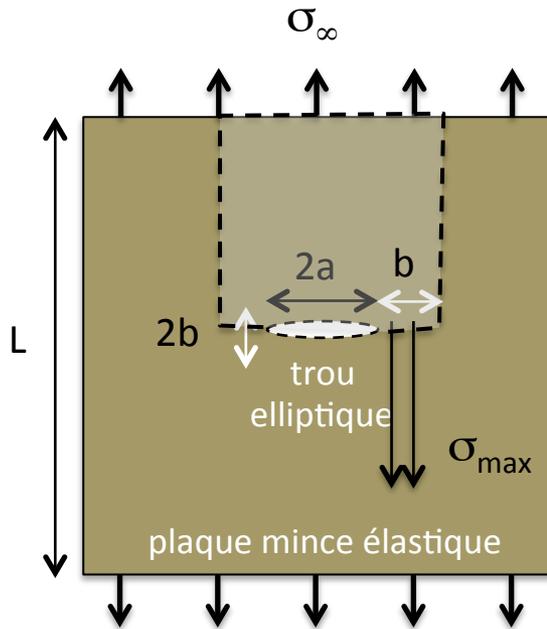
## OUI MAIS...

- La rupture n'a aucune raison de se faire de façon cohérente sur toute la surface macroscopique

- Les solides sont rarement sans « défauts »
  - dislocations, lacunes, ... dans les cristaux
  - fluctuations de structure gelée dans les amorphes

→ on a affaire à un problème de **NUCLÉATION/CROISSANCE...**

# INTENSIFICATION DES CONTRAINTES AUX EXTRÉMITÉS D'UN TROU ELLIPTIQUE [INGLIS, 1913]



- la surface du trou n'est soumise à aucune contrainte
- le champ de contrainte est perturbé sur  $\approx b$  (Saint-Venant)
- équilibre des forces :

$$\sigma_{\max} b \approx \sigma_\infty (a+b)$$

$$\sigma_{\max} \approx \sigma_\infty (1+a/b)$$

rayon de courbure en pointe  $\rho = b^2/a$

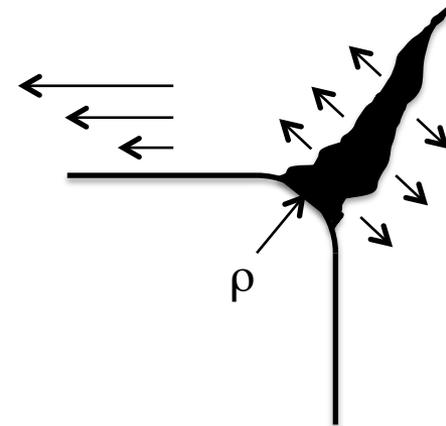
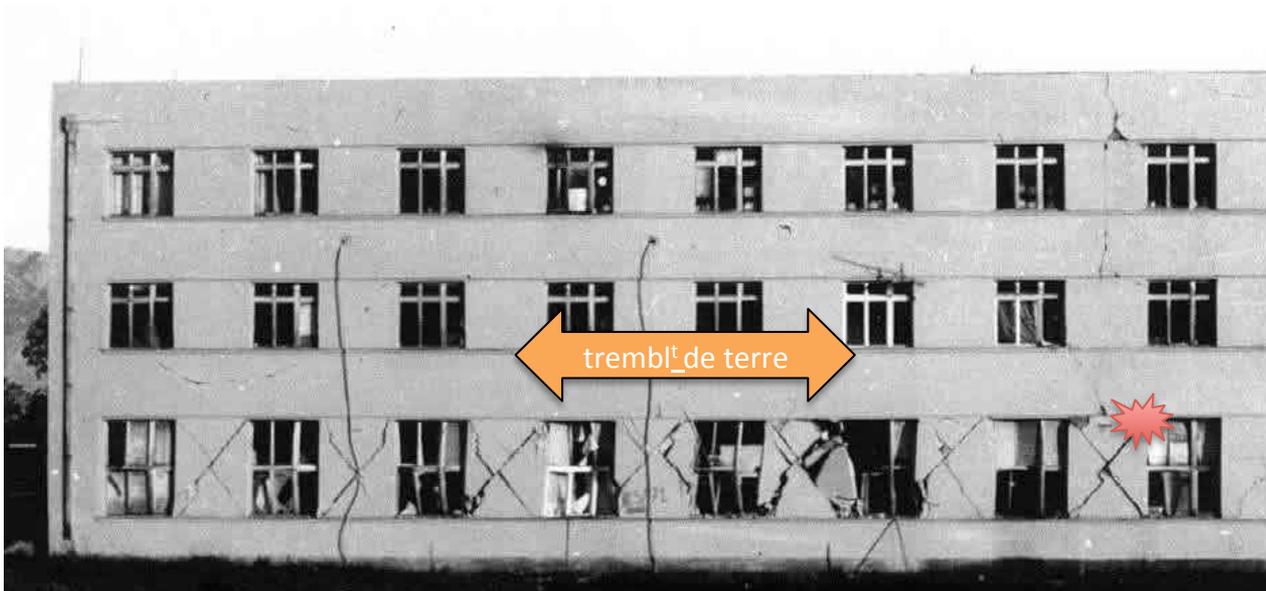
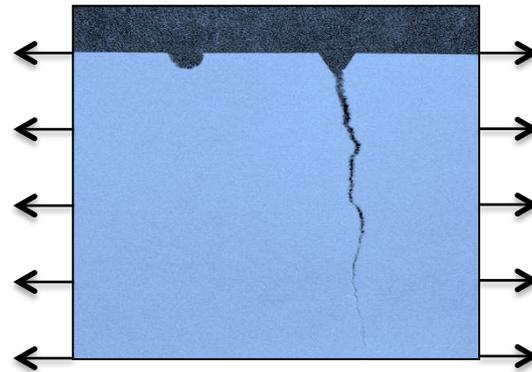
$$\sigma_{\max} \approx \sigma_\infty \left[ 1 + \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right]$$

facteur d'intensification des contraintes

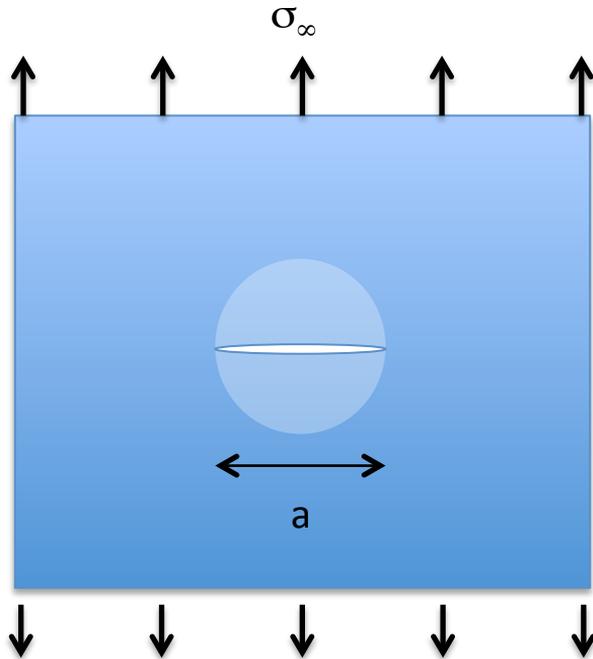
ex :  $a \approx \mu\text{m}$   
 $\rho \approx \text{Å}$   
 $\sigma_{\max}/\sigma_\infty \approx 100$

- on peut atteindre *localement* la contrainte théorique
- le facteur d'intensification ne dépend pas de la taille du défaut, juste de son ellipticité
- le calcul exact ne diffère que d'un facteur 2 ( $2a$ )

NB. c'est un *effet de pointe*, bien connu en électrostatique



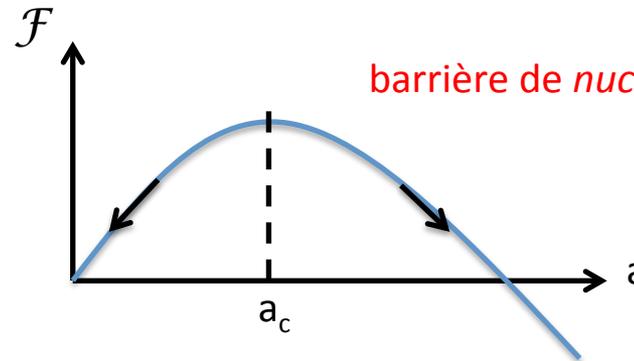
# APPROCHE ÉNERGÉTIQUE [GRIFFITH, 1921]



ouverture d'un trou de longueur  $a$   
dans un plaque mince sous contrainte

$$\frac{\Delta \mathcal{F}}{e} = -C \frac{\sigma_\infty^2}{2E} a^2 + \Gamma a$$

$$C = O(1)$$



$$a_c = \frac{E\Gamma}{C\sigma_\infty^2}$$

$$\Delta F_c = \frac{1}{2} \Gamma e a_c = \frac{eE\Gamma^2}{2C\sigma_\infty^2}$$

$$d(\Delta \mathcal{F})/da < 0 \Rightarrow d\mathcal{F}_{el}/dS > \Gamma$$

énergie de fracture

« taux de restitution de l'énergie »  $\mathcal{G}$

# NATURE ET CONSÉQUENCES DU « CRITÈRE DE GRIFFITH »

Au seuil :  $\mathcal{G}(\sigma_\infty, a) = \Gamma(T, V, \text{environnement}, \dots)$

$\mathcal{G}$  « energy release rate »

→ imposé par les conditions de chargement et la géométrie du système

$\Gamma$  « fracture energy »

→ fixée par les conditions locales en tête de fracture

NB1. Les critères pratiques du type  $\sigma_\infty > \sigma_c$  (ou  $\gamma_\infty > \gamma_c$ ) ne sont pas *intrinsèques* (ils dépendent de la taille du système et du mode de chargement)

NB2. Si on connaît la taille et la forme du défaut, le calcul de  $\mathcal{G}$  se réduit à la résolution du pb élastique (éléments finis)

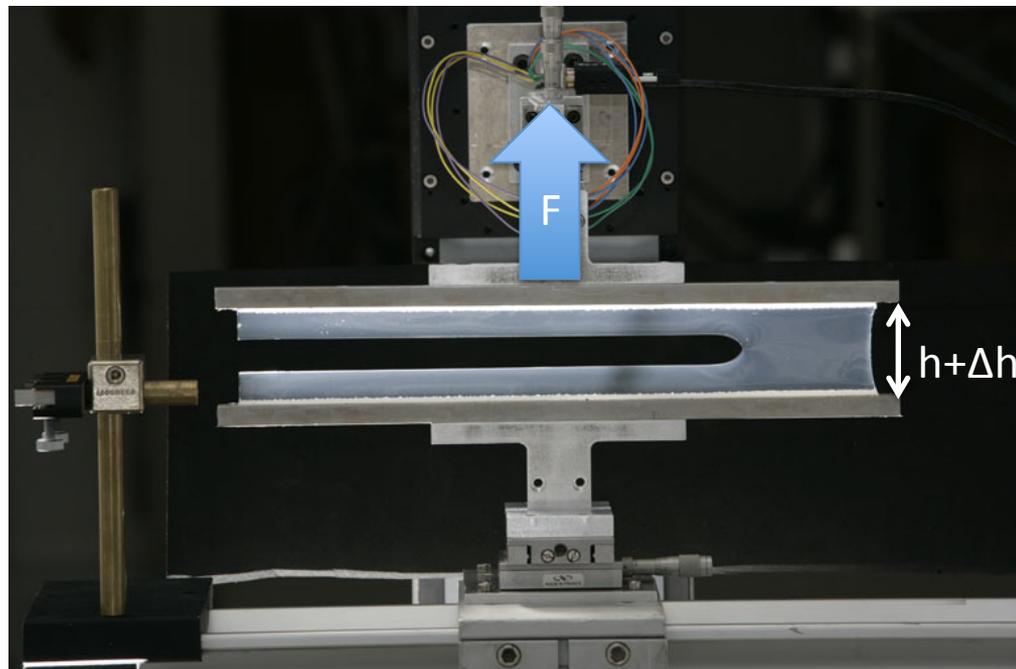
NB3. La prédiction de  $\sigma_c$  pour un échantillon « intact » est encore un pb ouvert.  
e.g. critères empiriques statistiques : probabilité de rupture au bout de  $\Delta t$  pour une charge  $\sigma_\infty$

→ pour déterminer  $\Gamma$  il vaut mieux imposer la taille et la forme du défaut = entaille

# UN CAS PRATIQUE :

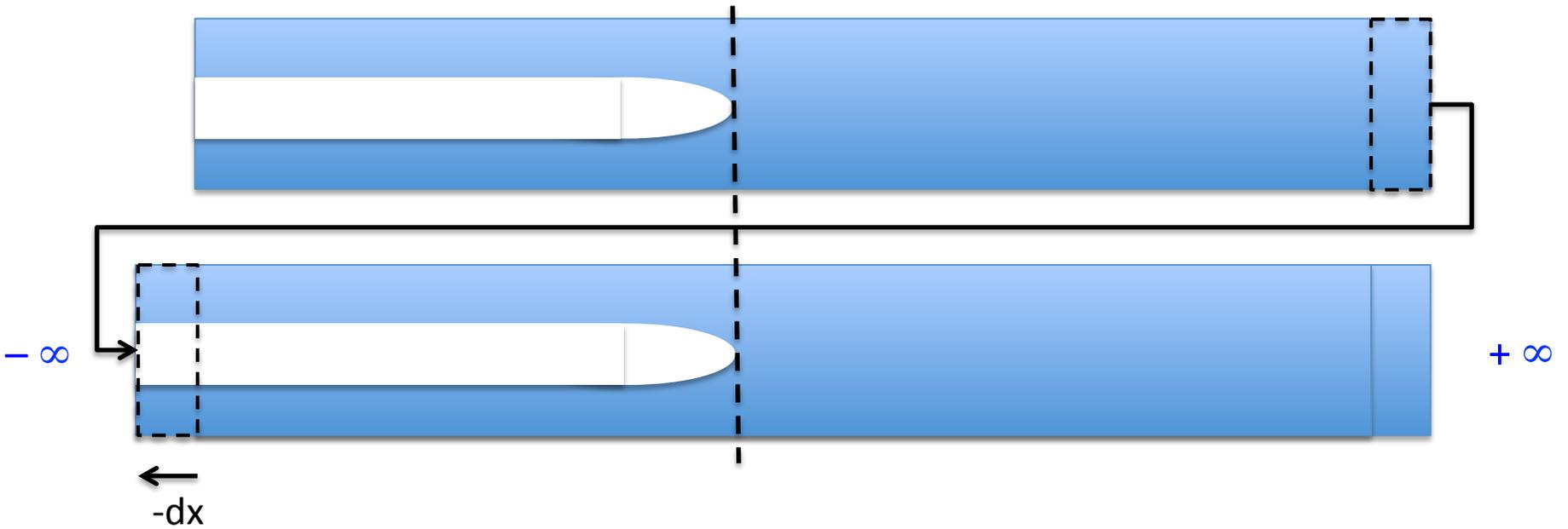
## FRACTURE D'UN HYDROGEL EN GÉOMÉTRIE « PURE SHEAR »

- longue plaque de gel  $L \times h \times e$  ( $L \gg h, e$ )
- une entaille règle la question de la nucléation...
- reste la dynamique de croissance du crack



[TB et al.]

→ Quel est le taux de restitution de l'énergie  $\mathcal{G}$  ?



→ densité volumique d'énergie libre élastique,  $w \approx$  uniforme

→ énergie relaxée :  $\mathcal{G} \text{ e } dx = w \text{ h e } dx$

$$\Rightarrow \mathcal{G} = w \times h$$

→ en négligeant les effets de bords on *mesure*

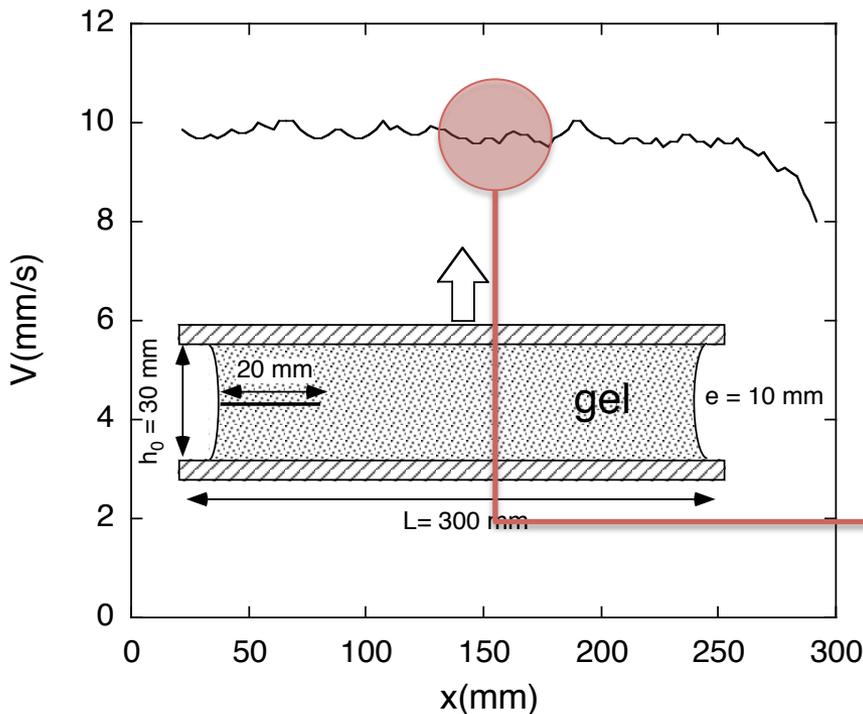
$$W \approx \frac{1}{Leh} \int_0^{\Delta h} F dh$$

→ dans la limite de l'élasticité linéaire ( $\Delta h \ll h$ )

$$W = \frac{1}{2} E^* \left( \frac{\Delta h}{h} \right)^2 \quad E^* = E/(1-\nu^2)$$

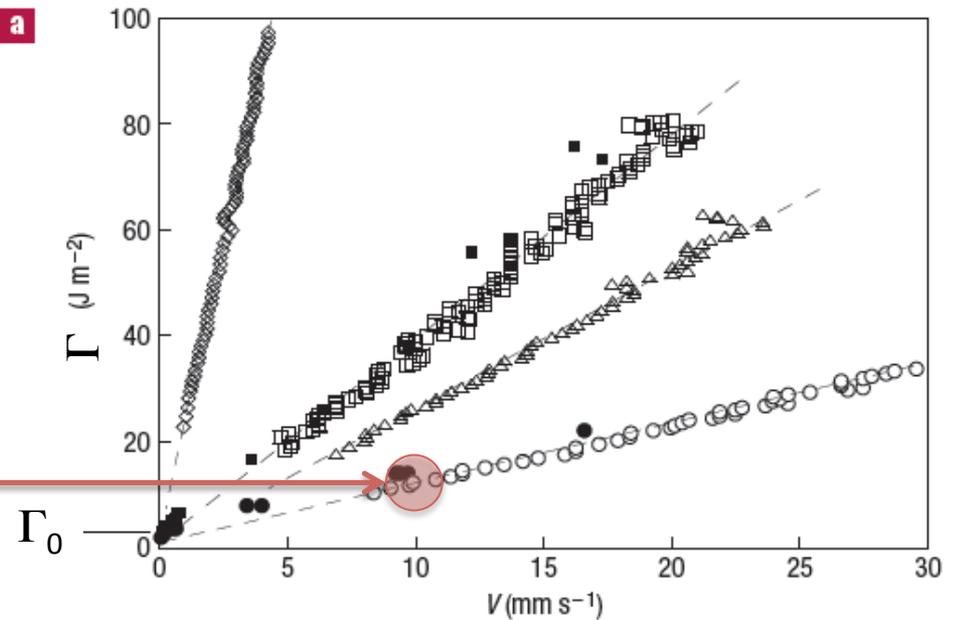
→  $G = w \times h$  uniforme loin des extrémités de l'échantillon...

$$G(\Delta h) = \Gamma(V) \Rightarrow V \text{ constante}$$



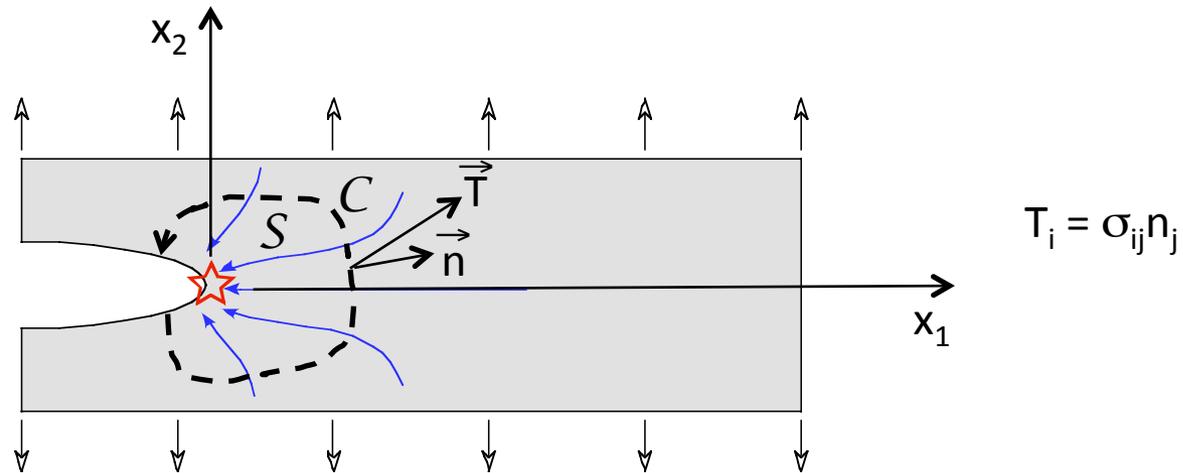
**a**

5% gélatine, 95% eau-glycérol



# INVARIANT THERMODYNAMIQUE

cf. e.g. [Maugis]



→ flux d'énergie élastique ( $\mathcal{G}$ )

vers la « zone de process » où elle est dissipée ( $\Gamma$ ) = puit d'énergie.

hyp. : propriétés élastiques homogènes, crack //  $x_3$

avec  $w[\varepsilon_{ij}(x_1, x_2)] = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$  densité d'énergie libre élastique  
(élasticité pas nécess<sup>t</sup> linéaire)

$$J = \int_C \left[ w n_1 - T_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - T_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] ds$$

L'« intégrale  $J$  » est **indépendante du contour  $C$**  tracé dans le volume *déformé élastiquement* et entourant la tête de fracture !

# INTERPRÉTATION

$C$  fixe dans le référentiel de la tête de fracture  $(x_1, x_2)$ ...

flux d'énergie à travers  $C$ : 
$$J \times V = \int_C \left[ \underbrace{wVn_1}_{\text{flux d'énergie élastique}} - V \left( T_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - T_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] ds$$



Jim Rice, Harvard

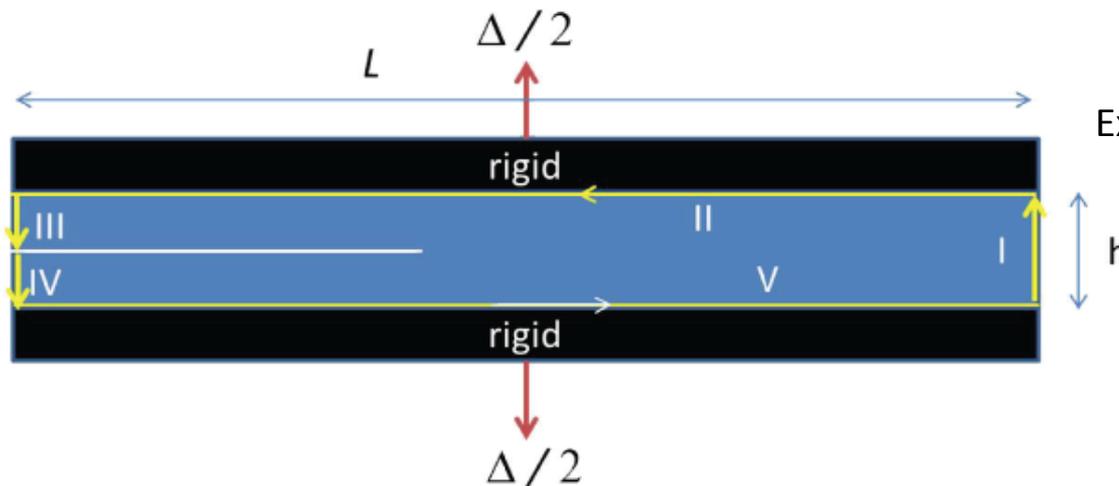
flux d'énergie élastique

travail des forces extérieures au système

$$\vec{j}_w = w\vec{V}$$

$\Rightarrow J$  s'identifie au taux de restitution de l'énergie  $\mathcal{G}$

NB.  $J = 0$  sur un contour fermé (i.e. n'entourant pas la tête de fracture)



Exercice : « en pure shear » retrouver :



dans la limite  $\Delta \ll h$

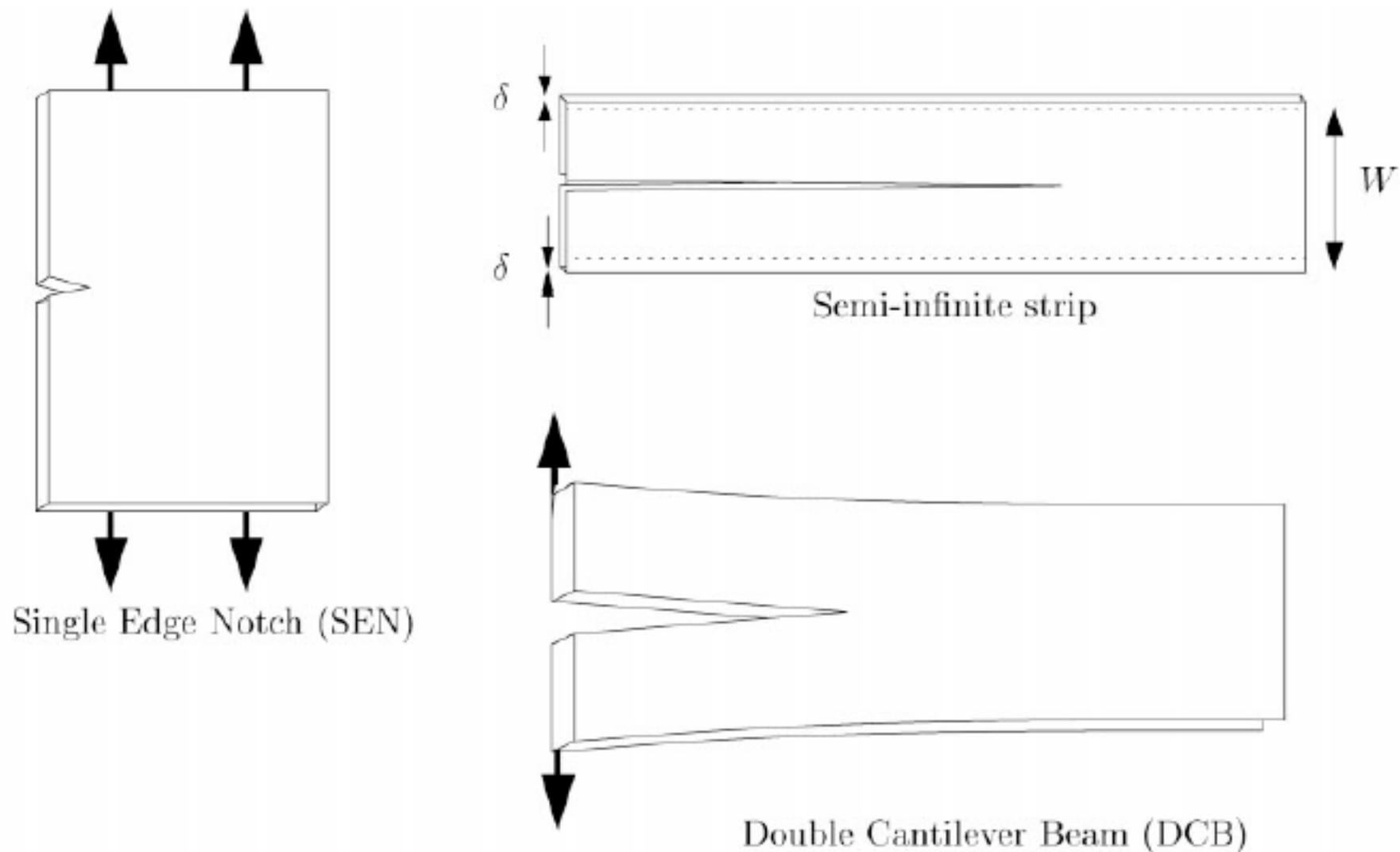
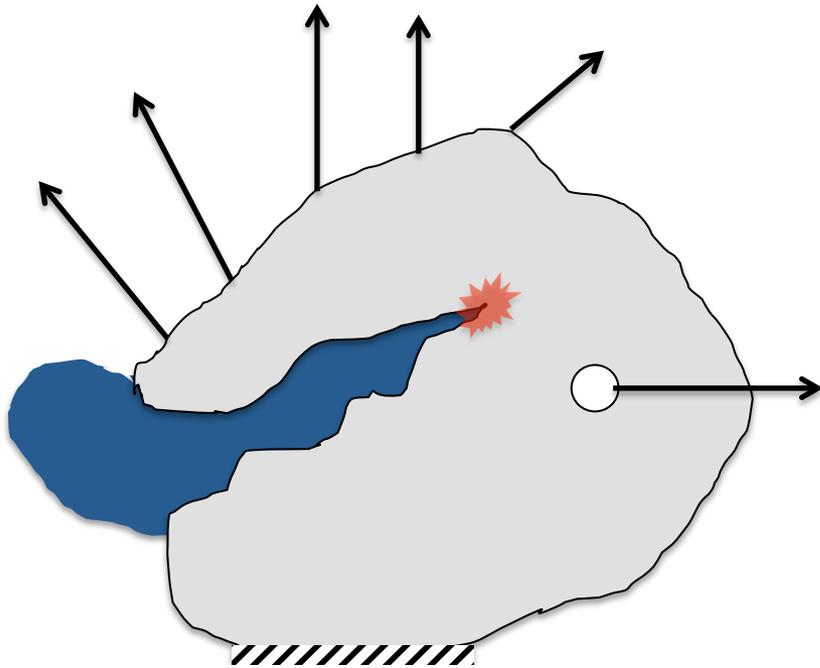


Fig. 10. Some typical experimental loading configurations.

# QUEL ATTRAIT POUR LE *PHYSICIEN* ?



*a priori*, une affaire de mécanicien...

champ de déformations :  $u_{i=1..3}$

$$\text{champ de déformations : } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$$

champ de contraintes (Hooke) :  $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$

$$\text{coefficients de Lamé : } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} ; \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\text{Newton : } \rho \frac{\partial u_i^2}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

+ **conditions aux limites.**

DEUX PROBLÈMES EN UN :

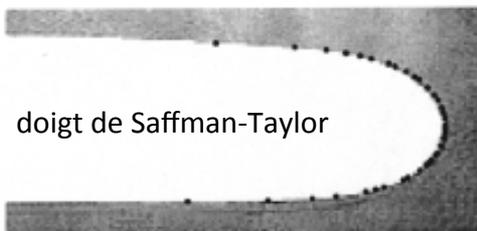
- > à « grande échelle », essentiellement élastique
- > à « petite échelle », essentiellement non-élastique

UN SYSTÈME HORS-ÉQUILIBRE

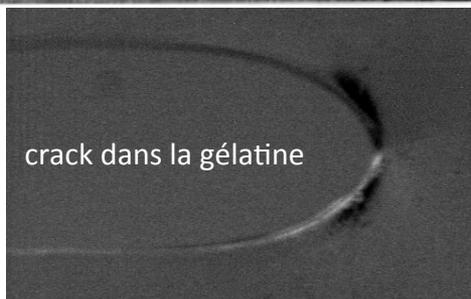
- > problème à seuil
- > problème de croissance

UN PROBLÈME À FRONTIÈRE LIBRE :

- > cf. Saffman-Taylor, croissance cristalline(dendrites), front de réaction, flammes, ...
- > la fracture définit les conditions aux limites
- > qui en retour définissent sa forme et son extension.
- > instabilités, patterning, ...



doigt de Saffman-Taylor



crack dans la gélatine

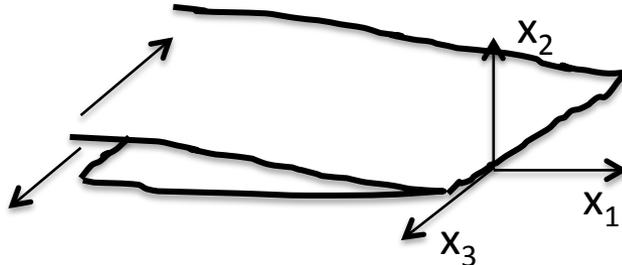
# L'APPROCHE DU *MÉCANICIEN* : ET SI ON IDÉALISAIT LE PROBLÈME ?

1. les déformations sont élastiques linéaires presque partout  
i.e. sauf dans une zone (process zone) d'extension négligeable devant la taille du système
2. la fracture est une coupure de rayon de courbure nulle en pointe  
NB. l'intensification de contraintes y-est alors infinie (puits d'énergie élastique).

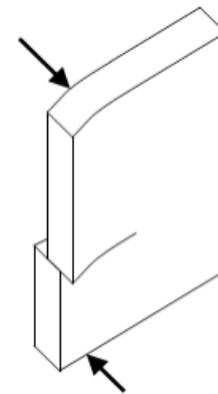
→ **LINEAR ELASTIC FRACTURE MECHANICS**, **SMALL SCALE YIELDING**

UN CAS D'ÉCOLE...

déchirure d'un bloc d'extension infinie  
champ de déformation *scalaire*  $u_3(x_1, x_2)$



« fracture en mode III »



# SINGULARITÉ DOMINANTE EN LEFM

RAPPEL (CF. LANDAU D'ÉLASTICITÉ) :

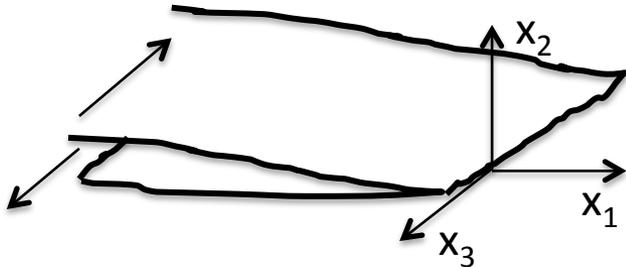
champ de déformations :  $u_{i=1..3}$

$$\text{champ de déformations : } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$$

champ de contraintes (Hooke) :  $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$

$$\text{coefficients de Lamé : } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} ; \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\text{Newton : } \rho \frac{\partial u_i^2}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$



crack *stationnaire* en mode III

$$\left. \begin{array}{l} u_3(x_1, x_2), \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \sigma_{31}, \sigma_{32} \neq 0 \\ \sigma_{3i} = \mu \partial u_3 / \partial x_i ; \partial_i \sigma_{3i} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta u_3 = 0$$

fonction *harmonique* à 2D : *analyse complexe*

$\exists w(\zeta = x_1 + ix_2)$  *analytique* telle que  $u_3 = \mu^{-1} \Im[w]$

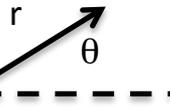
$$\rightarrow w' = \sigma_{32} + i\sigma_{31}$$

au voisinage de l'origine on cherche

$w' = A_\lambda \zeta^\lambda$ , imaginaire pur pour  $\theta = \pm\pi$

$$\sigma_{32}(\theta = \pm\pi) = 0$$

crack



$$\left[ \begin{array}{l} A_\lambda \text{ réel (cos } \lambda\pi = 0) \Rightarrow \lambda = \dots \quad -5/2 \quad -3/2 \quad -1/2 \quad 1/2 \quad 3/2 \quad \dots \\ A_\lambda \text{ imaginaire (sin } \lambda\pi = 0) \Rightarrow \lambda = \dots \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \end{array} \right.$$

# TERME DOMINANT AU VOISINAGE DE LA TÊTE DE FRACTURE

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \dots -5/2 \quad -3/2 \quad \boxed{-1/2} \quad 1/2 \quad 3/2 \quad \dots \\ \lambda = \dots -2 \quad -1 \quad \boxed{0} \quad 1 \quad 2 \quad \dots \end{array} \right.$$

• les termes avec  $\lambda > 0$  ont  $w' \rightarrow 0$  i.e.  $\sigma_{32} \rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow 0$   
ils ne contribuent donc pas à la rupture

• la densité d'énergie libre élastique  $\mathcal{W} = (\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2)/(2\mu) = |w'|^2/(2\mu)$   
doit être intégrable lorsque  $r \rightarrow 0$

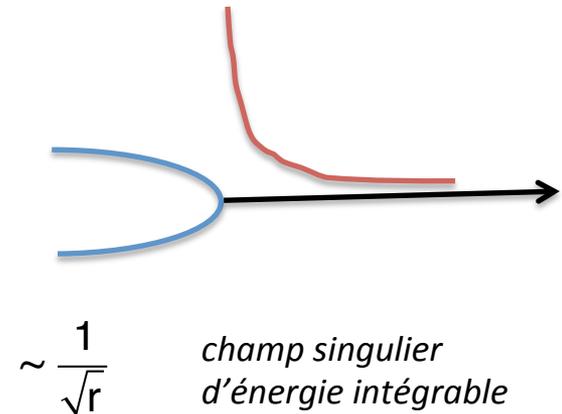
$$\int_0^r \rho^{2\lambda} 2\pi\rho d\rho < \infty \Rightarrow 2\lambda + 1 \geq 0$$

$\Rightarrow$  le terme dominant est  $\lambda = -1/2$

en notant  $A = K_{III}/(2\pi)^{1/2}$

( $K_{III}$  : stress intensity factor)

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{31} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin(\theta/2) \\ \sigma_{32} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \end{array} \right.$$



• Ouverture du crack :  $\Delta = u_3(+\pi) - u_3(-\pi) \rightarrow$

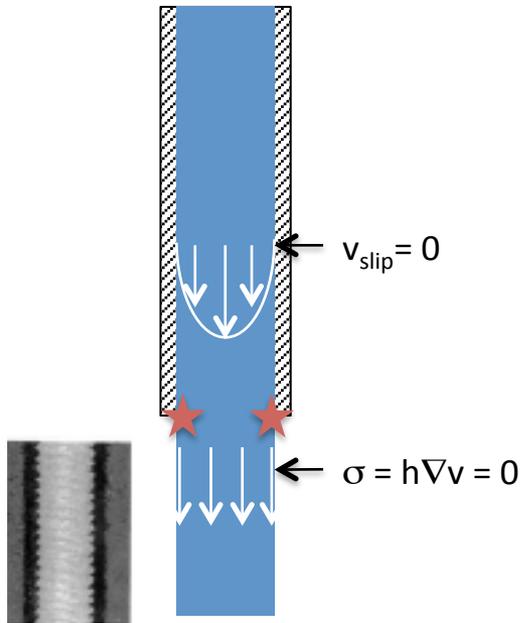
$$\Delta = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sim \sqrt{r}$$

*pointe parabolique*

# SIINGULARITÉS EN MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

→ dès qu'il y a changement de c.l. de  $u = 0$  à  $\nabla u = 0$

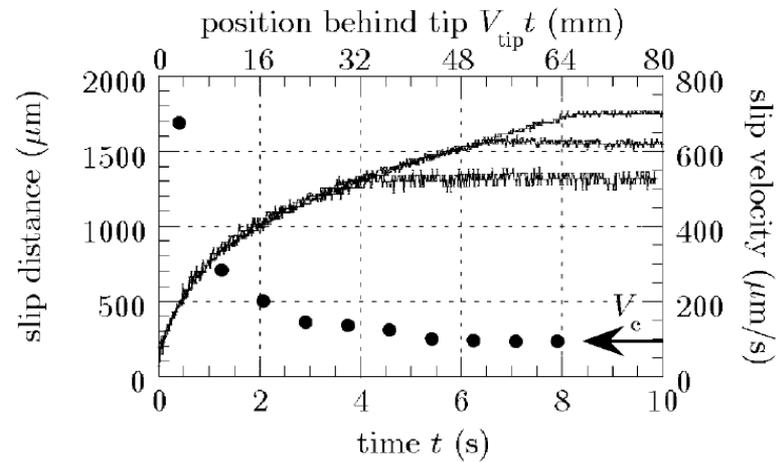
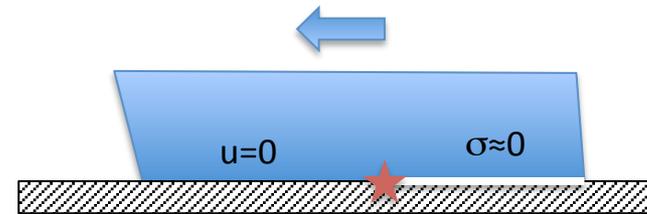
EX.1 EXTRUSION D'UN FLUIDE (E.G. VISCOÉLASTIQUE)



Moffat ( $Re = 0$ )

$$\sigma = r^{-1/2} f_{\text{visc}}(\theta) + Wi r^{-1} f_{\text{el}}(\theta)$$

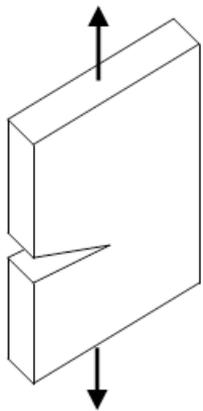
EX.2 FRONT DE GLISSEMENT



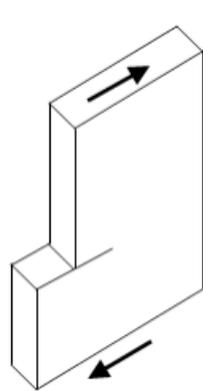
## QUESTION DE MODE

→ le résultat obtenu en mode III (dominance du terme  $\sigma \sim r^{-1/2}$ ) est général

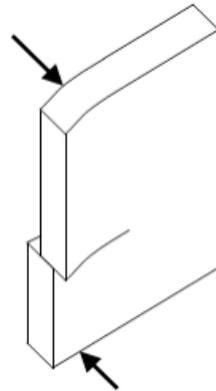
→ le champ de contrainte se décompose en trois termes correspondants aux trois symétries possibles



mode I  
opening



mode II  
in-plane shear



mode III  
out-of-plane shear

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos(\theta/2) \begin{Bmatrix} 1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \cos(3\theta/2) \\ 1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \begin{Bmatrix} -\sin(\theta/2) [2 + \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2)] \\ \cos(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)] \\ \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \begin{Bmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{Bmatrix}$$



## LES DEUX INFINIS

On a déterminé la solution asymptotique valable :

- ni trop près ( $\sigma$  donc  $\varepsilon$  divergent et l'élasticité linéaire **LEFM** n'est plus légitime – **Process Zone**)
- ni trop loin (on a gardé le terme dominant lorsque  $r \rightarrow 0$ )

On suppose donc que les deux échelles extrêmes sont assez éloignées (**Small Scale Yielding**)

$$\Rightarrow \sigma \propto \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}$$

- Comment déterminer K ?

→ grâce aux conditions aux limites (chargement)

→ certes, mais le terme singulier n'est plus dominant à grande distance du crack !

- Comment faire le lien entre les deux infinis (tête de fracture et système mécanique) ?

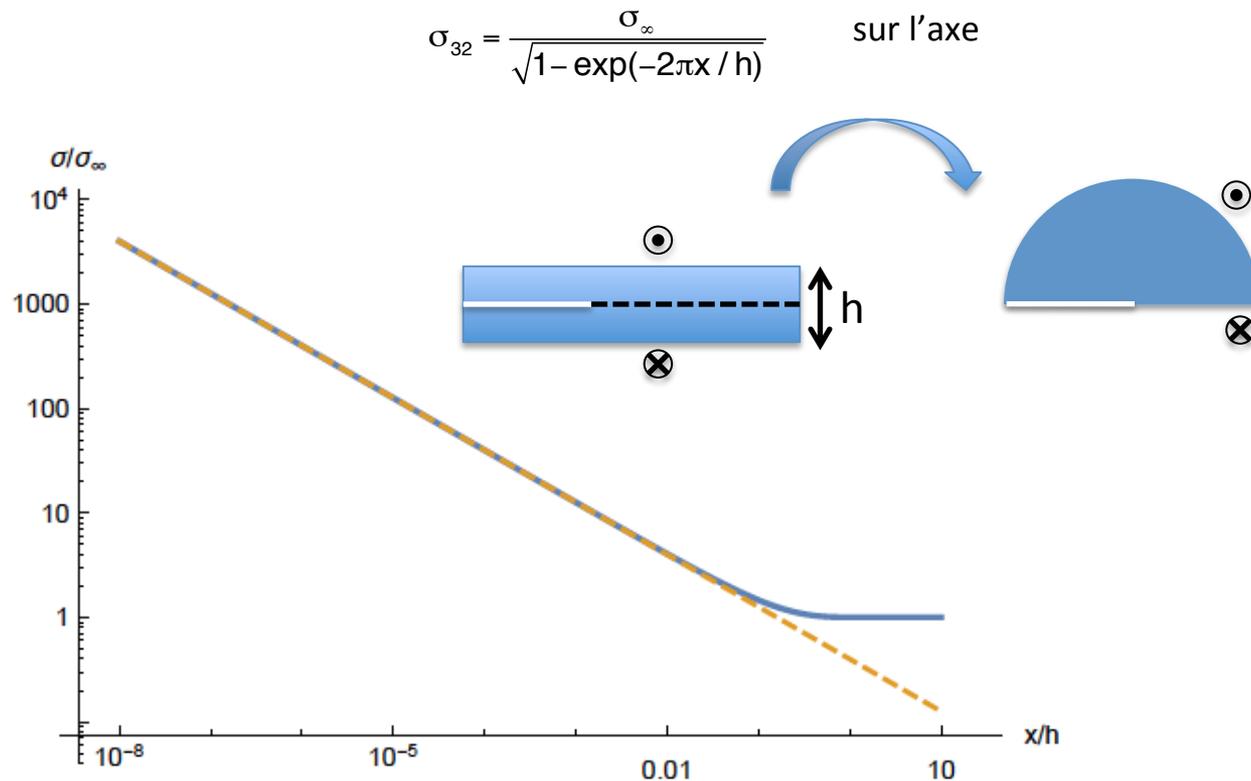
→ via la constance du flux d'énergie élastique

$$J = \frac{1}{E^*} [K_I^2 + K_{II}^2] + \frac{1}{2G} K_{III}^2 = \mathcal{G}$$

NB. En LEFM + SSY le champ singulier est essentiellement indépendant du détail du chargement et de la taille/forme de l'échantillon (« crack autonomy »)

# SOLUTION EXACTE POUR UN CRACK DANS UNE PLAQUE MINCE INFINIE CHARGÉE EN MODE III

→ transformation conforme dans le plan complexe  $\zeta$  de la demi-bande supérieure en demi-plan supérieur



Exercice : déterminer  $K_{III}$

(i) à partir de la solution asymptotique

(ii) à partir du taux de restitution de l'énergie  $\mathcal{G}(\sigma_{\infty})$

" The utility of elastic stress analyzes lies in the similarity of near crack tip stress distributions for all crack configurations. **Presuming deviation from linearity to occur only over a region that is small compared to geometrical dimensions (small-scale yielding)**, the elastic stress-intensity factor controls the local deformation field. This is the sense that two bodies with cracks of different size and with different manners of load applications, but which are otherwise identical, will have identical near tip deformation fields if the stress intensity factors are equal. Thus, the stress intensity factors uniquely characterizes the load sensed at the crack tip in situations of small-scale yielding, and **criteria governing crack extension** for a given local load rate, temperature, environment, sheet thickness (when plane stress fracture modes are possible), and history of prior deformation **may be expressed in terms of stress intensity factors [...]**"

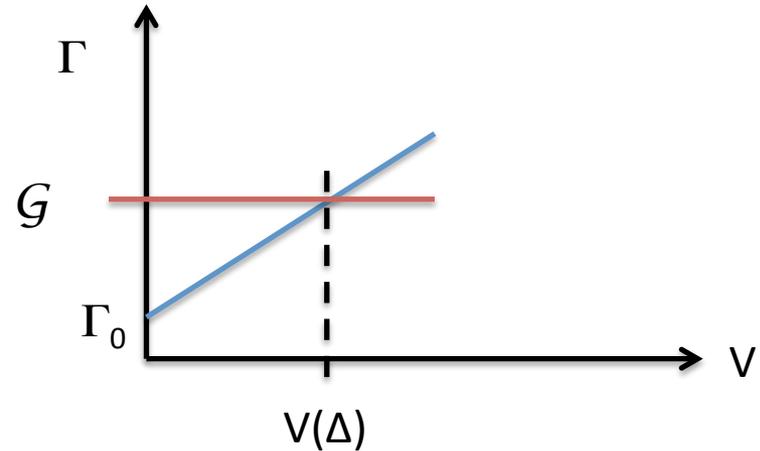
J.R. Rice, in Fracture, H. Liebowitz (ed.), vol.2 Academic Press, NY (1968), p191.

*NB. le facteur d'intensité des contraintes  $K$  peut se calculer numériquement (éléments finis)*

# CRITÈRES DE PROPAGATION (QUAND, À QUELLE VITESSE, OÙ ?)

[GRIFFITH, 1920]

- propagation pour  $\mathcal{G}(\Delta) > \Gamma_0$  (Griffith)  
ou  $K(\Delta) > K_0$  (Inglis)
- Crack quasi-stationnaire :  $G(\Delta) = G(V)$   
cf. gélatine
- $\Delta$  contrôle la vitesse
- origine microscopique de  $\Gamma(V)$  ?
- Matériau fragile (brittle)
- ex. verre



→  $\Gamma(V) \approx \Gamma_0 = 2\gamma$       ( $\gamma$  = énergie de surface)       $\gamma \approx U_0/a^2 \approx \text{J/m}^2$

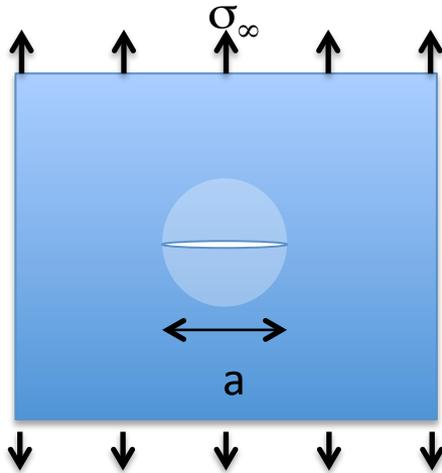
→  $\mathcal{G} > \Gamma_0 \Rightarrow$  le crack accélère... jusqu'à quelle vitesse ?

$$\left. \begin{array}{l} \rho \frac{\partial u_i^2}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \\ \sigma \propto E\varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{G}(\Delta, V/c)$$

avec  $c = (E/\rho)^{1/2}$  vitesse du son

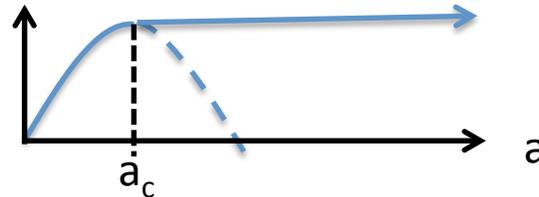
peut-on prédire la forme de  $\mathcal{G}(V/c)$  ?

# UNE APPROCHE EN LOI D'ÉCHELLES DE LA « FRACTURE RAPIDE »



estimation de l'énergie libre du système :

$$\frac{\mathcal{F}_{\text{tot}}}{e} = -C_p \frac{\sigma_\infty^2}{2E} a^2 + \Gamma a + C_k \frac{1}{2} \rho a^2 V^2$$

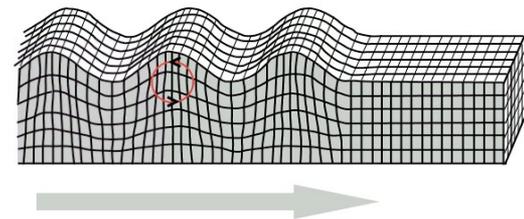


$a < a_c$  : pas de propagation  
 $a > a_c$  :  $\mathcal{F}_{\text{tot}} = \text{cte} = \mathcal{F}_{\text{tot}}(a_c)$

$$\Rightarrow V = \underbrace{\sqrt{\frac{\rho}{E}} \sqrt{\frac{C_p}{C_k}} \varepsilon_\infty}_{V_{\text{lim}}} \left[ 1 - \frac{a_c}{a} \right]$$

en mode I, un calcul exact (LEFM) prédit en fait  $V_{\text{lim}} = c_R (< c_S)$  vitesse des ondes de Rayleigh

Rayleigh Wave

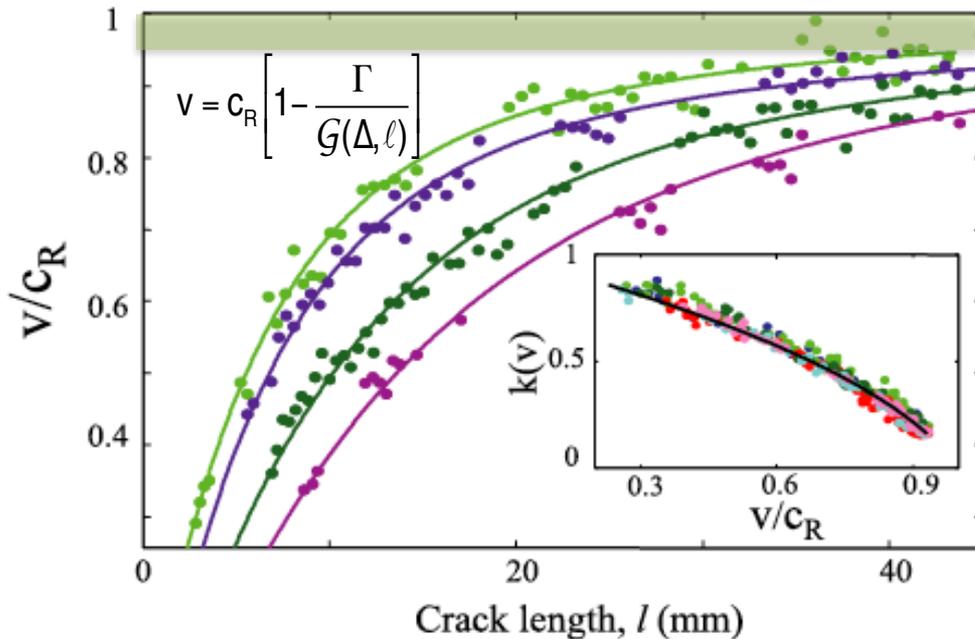


exercice : reprendre l'analyse complexe du mode III en gardant le terme inertiel et montrer que  $K_{III}(V) = K_{III}(V=0)(1-V^2/c_S^2)^{-1/2}$  avec  $c_S = \sqrt{\mu/\rho}$ .

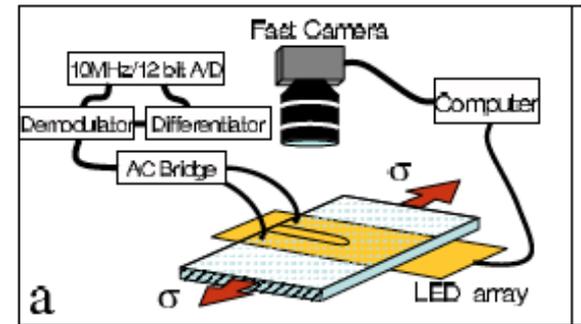
# TEST EXPÉRIMENTAL À L'AIDE D'UN SOLIDE « MOU »

**Figure 1.** The equation of motion predicted by LEFM for an infinite medium (equation (16)) is in excellent quantitative agreement with experiments performed using a polyacrylamide gel [95].

(a) Comparison of equation (16) for crack dynamics in an infinite medium for different applied values of  $\sigma_\infty$ . The inset shows a comparison of the universal function  $k(v)$  in equation (14) with experiments. See [95] for details of the experiments.



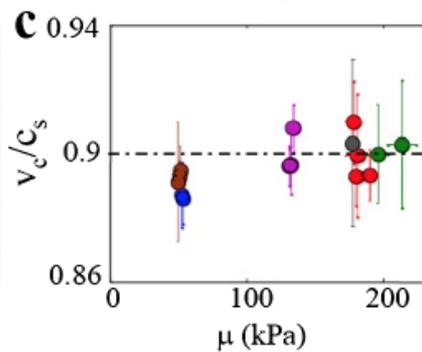
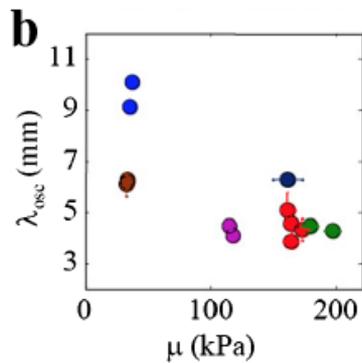
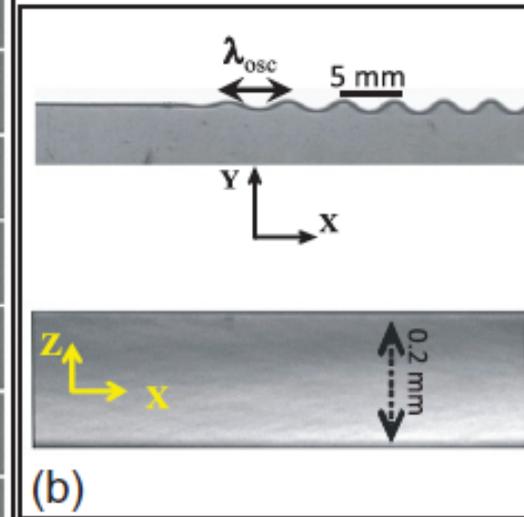
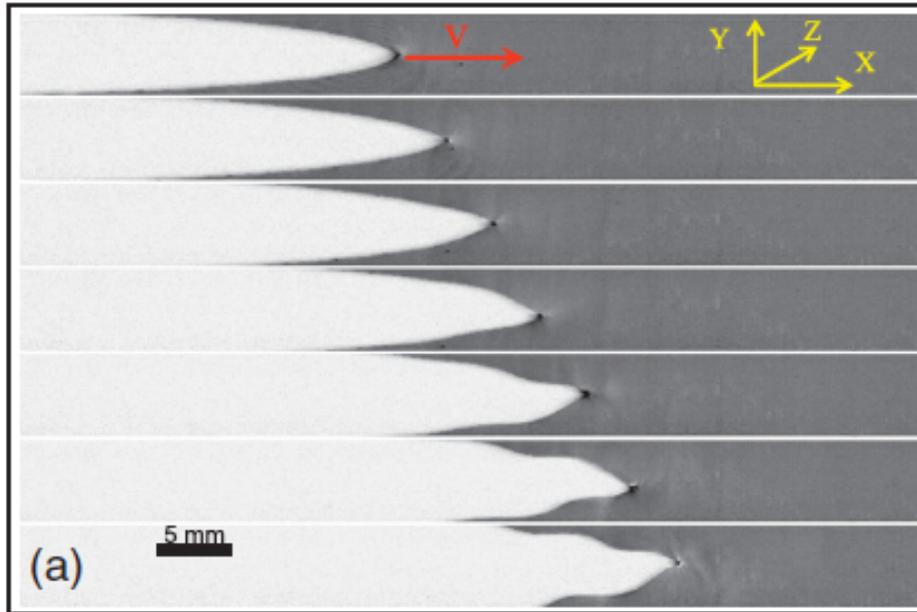
$E \sim 100 \text{ kPa}$   
 $\rho \approx 10^3 \text{ kg/m}^3$   
 $c_R = 5.5 \text{ m/s}$



LEFM + SSY  
 est quantitativement prédictif

et au delà de  $v/c_R = 0.95$  ?

# INSTABILITÉ OSCILLANTE EN FRACTURE RAPIDE (CF. COURS #3)



- mécanisme de l'instabilité ?
- qu'est-ce qui sélectionne  $\lambda_{osc}$  ?

→ NB.  $\lambda_{osc}$  n'est pas purement géométrique...

→ critère de sélection du chemin de fracture ?

→ échelles de longueur en mécanique de la fracture ?

# ECHELLES DE LONGUEUR EN MÉCANIQUE DE LA FRACTURE

- remarque #1 : **l'élasticité *linéaire* est une théorie *sans échelle intrinsèque***

→ continuum : on ne sent plus l'atome (micro)

→ ce sont les conditions aux limites (macro)

qui fixent l'échelle de variation des champs (déformation, contrainte)

- remarque #2 : **le champ de contrainte singulier (LEFM) nécessite un *cut-off* à petite échelle**

→ plasticité ( $\neq E$ )

→ non-linéarités élastiques ( $\neq L$ )

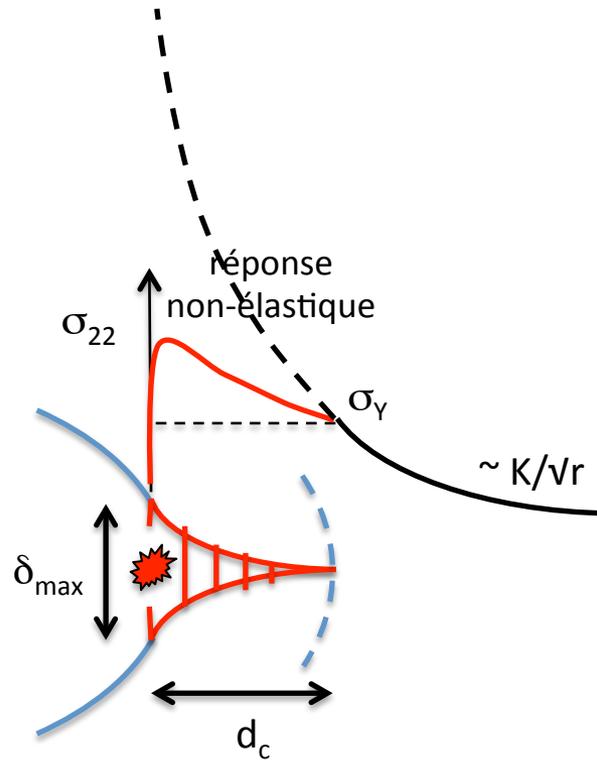
rappel : le credo de base de LEFM-SSY est que

l'élasticité ET la linéarité sont mises en défaut dans la MÊME zone...

humpf ! voyons cela...

# MODÈLE DE LA ZONE COHÉSIVE

→ Proposé (DUGDALE 1960-BARENBLATT 1962)  
pour régulariser physiquement la divergence en tête



NB. la distribution de contrainte localisée génère sa propre divergence, de signe opposé (tend à guérir le crack), qui peut donc compenser la divergence LEFM en  $r = 0$  (la linéarité du pb permet d'ajouter les deux termes).

→ En général la condition d'annulation de la singularité est difficile à trouver (pb. à frontière libre)

→ Pour  $\sigma = \sigma_\gamma$  (zone plastique de Dugdale), la condition de régularisation est simplement :

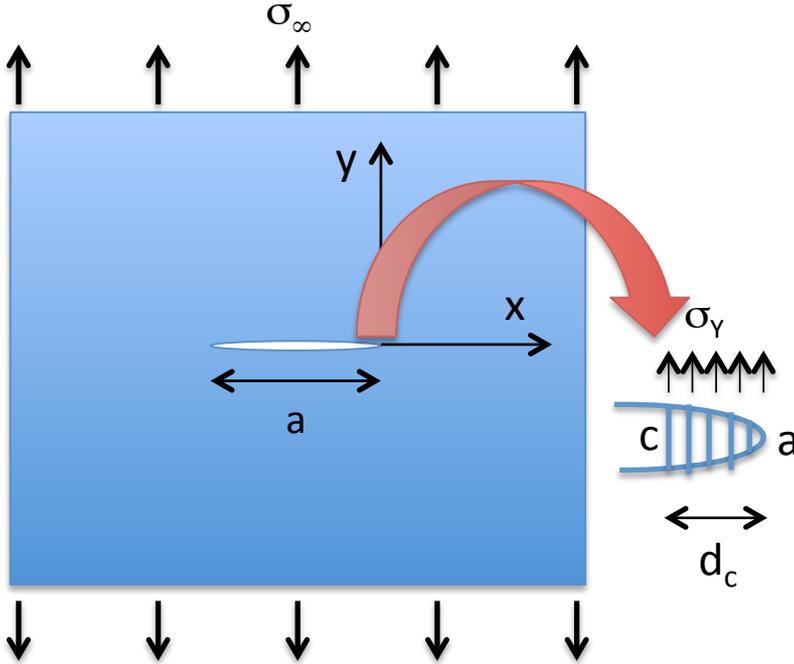
$$\mathcal{G} = \sigma_\gamma \times \delta_{\max}$$

→ Cette relation semble si raisonnable thermodynamiquement qu'elle doit être plus générale que cela...

Exercice – montrer à l'aide de l'intégrale  $J$  que :

$$\mathcal{G} = \int_0^{\delta_{\max}} \sigma(u) du$$

# DANS LE DÉTAIL...



Solution *exacte* LEFM pour un crack dans une plaque infinie :

$$\sigma_y(x,0) = \frac{K_{ext} + K_{coh}}{\sqrt{\pi a}} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \sigma_\infty - \frac{2\sigma_Y}{\pi} \tan^{-1} \left[ \frac{c\sqrt{x^2 - a^2}}{x\sqrt{a^2 - c^2}} \right]$$

$$K_{ext} = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}$$

$$K_{coh} = -2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \sigma_Y \cos^{-1} \frac{c}{a}$$

Condition de régularisation en tête :

$$K_{ext} + K_{coh} = 0 \Rightarrow \frac{d_c}{a} = 2 \sin^2 \left[ \frac{\pi \sigma_\infty}{4 \sigma_Y} \right]$$

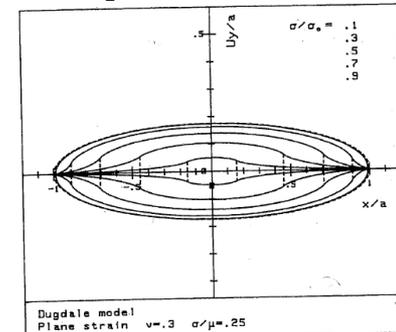
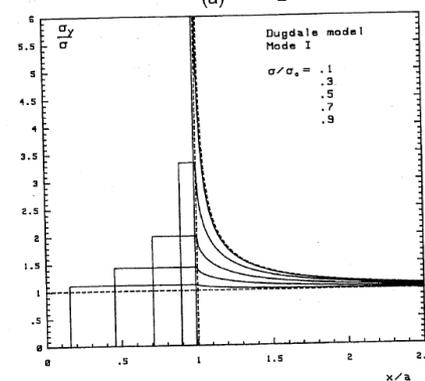
$$\Rightarrow \sigma_{yy}(x,0) = \sigma_Y - \frac{2\sigma_Y}{\pi} \tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x \tan(\pi \sigma_\infty / 2\sigma_Y)} \right]$$

Condition de Small Scale Yielding :

$$d_c \ll a \Leftrightarrow \sigma_\infty \ll \sigma_Y \Rightarrow \sigma_{yy}(x,0) = \sigma_Y - \frac{2\sigma_Y}{\pi} \tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x \pi \sigma_\infty / 2\sigma_Y} \right]$$

Où l'on retrouve le comportement universel :

$$d_c \ll x - a \ll a \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x \pi \sigma_\infty / 2\sigma_Y} \gg 1 \Rightarrow \sigma_{yy}(x,0) = \sigma_\infty \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{x - a}} = \frac{K_{ext}}{\sqrt{2\pi}} (x - a)^{-1/2}$$



# EXTENSION DE LA ZONE COHÉSIVE ET ZONE DE FAILLITE DE LEFM

→ Dans la limite où SSY reste légitime :  $\sigma_Y \approx K/\sqrt{d_c}$  avec  $K^2 = \Gamma E$

$$\Rightarrow d_c \approx \frac{\Gamma}{E} \left( \frac{E}{\sigma_Y} \right)^2$$

NB.  $d_c$  indépendant de la taille du système  
(autonomie de la zone de process SSY)

NB Cette approche suppose que  $\sigma_Y \ll E$  i.e. que LEFM est valide en dehors de la zone cohésive.  
C'est une bonne approximation pour les métaux.

Ce n'est pas toujours le cas (ex. hydrogels, élastomères)

Ces solides se rigidifient fortement pour des étirements  $\approx 100\%$ , i.e.  $\sigma \sim E$ .

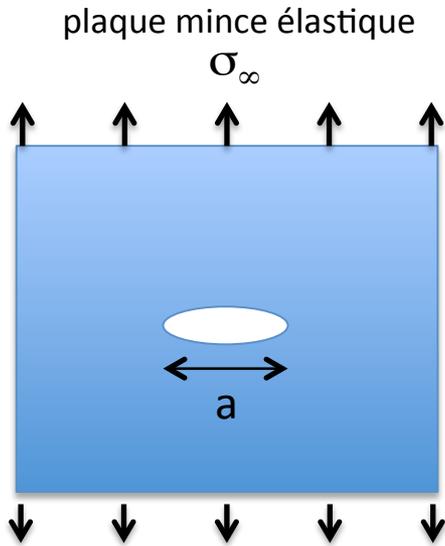
Cela fixe une nouvelle distance  $\mathcal{L}$  :  $E \approx K/\sqrt{\mathcal{L}}$

$$\Rightarrow \mathcal{L} \approx \frac{\Gamma}{E}$$

- verre :  $\Gamma \approx 1 \text{ J/m}^2$ ,  $E \approx 100 \text{ GPa} \Rightarrow \mathcal{L} \approx 10^{-11} \text{ m}$ , évidemment non-pertinent
- hydrogel :  $\Gamma > 1 \text{ J/m}^2$ ,  $E \approx 10 \text{ kPa} \Rightarrow \mathcal{L} > 10^{-4} \text{ m}$

# EMOUSSEMENT ÉLASTIQUE (ELASTIC BLUNTING)

[Hui et al. 2003]



$$\text{LEFM} : \mathcal{G} \approx \sigma_\infty^2 / 2E \times a ; K_I \approx \sqrt{\mathcal{G}E} ; \Delta \approx \frac{K_I}{E} \sqrt{r}$$

→ Rayon de courbure de la pointe :

$$R \approx (K_I/E)^2 \approx \mathcal{G}/E = \mathcal{L}$$

→ Cut-off géométrique :

$$\sigma_{\max} = K_I/\sqrt{R} \approx E$$

$$\sigma_{\max} \approx E$$

→ l'émoussement tue l'effet de pointe

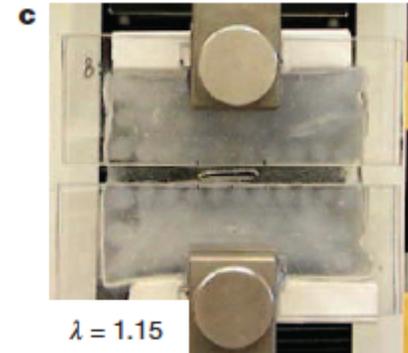
→ paradoxe : un matériau avec  $\sigma_y \gg E$  serait « incassable » !?

→ Il faut abandonner l'hypothèse d'élasticité *linéaire*

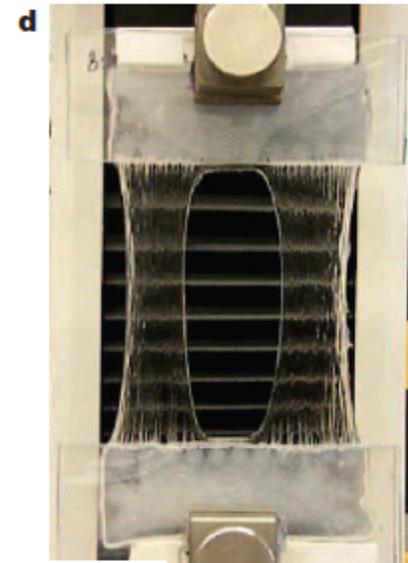
→ au voisinage ( $r < \mathcal{L}$ ) de la pointe.

→ le module petites déformations  $E$  n'est plus pertinent.

→ il faut imaginer que  $E_{\text{eff}} (> \sigma_y) \gg E$  (« strain hardening »)



$\lambda = 1.15$



$\lambda = 17$

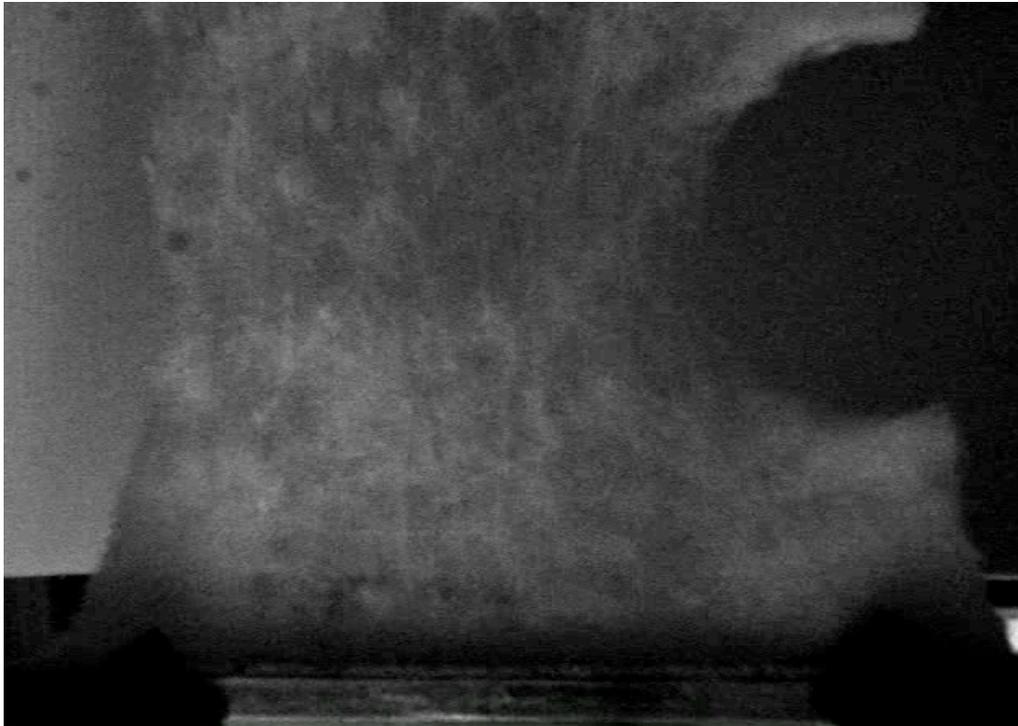
2 cm

[Suo et al, Nature 2012]

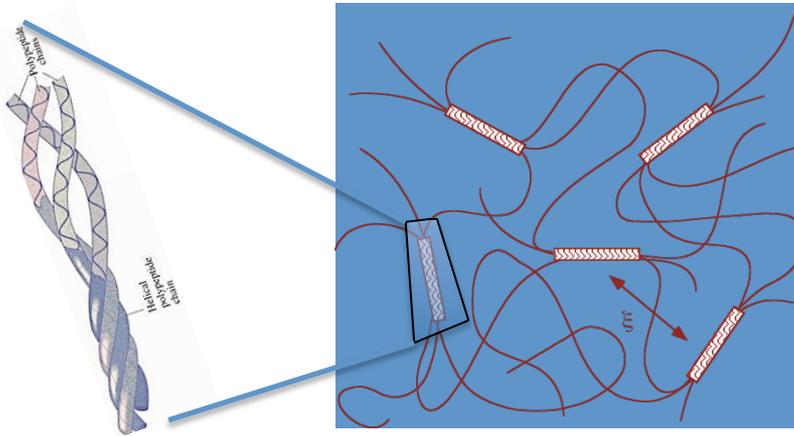
*qu'en est-il dans la vraie vie ?*

## NB. LA FRACTURE N'EST PAS LE SEUL MODE DE RUPTURE POSSIBLE...

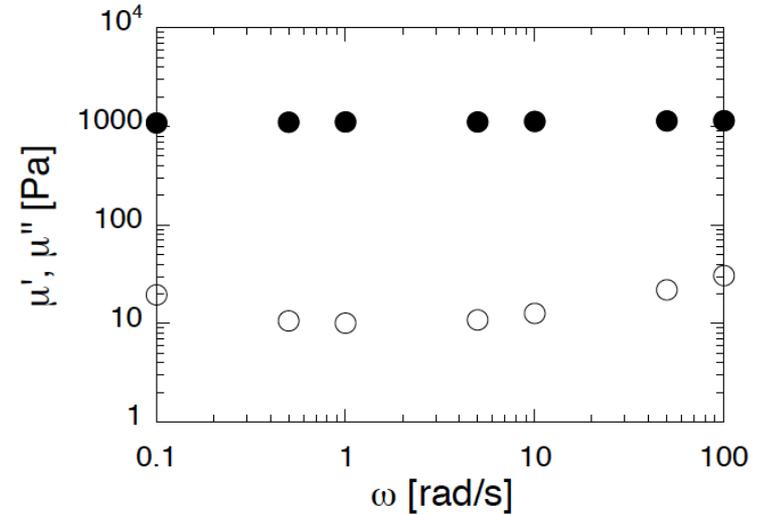
« émoussement plastique » d'une fracture dans une plaque de feutre  
La fracture ne se propage pas. Le feutre se décohère en volume.  
« Large Scale Yielding » extrême.



# UN CAS PRATIQUE : LA ZONE COHÉSIVE DANS UN GEL PHYSIQUE

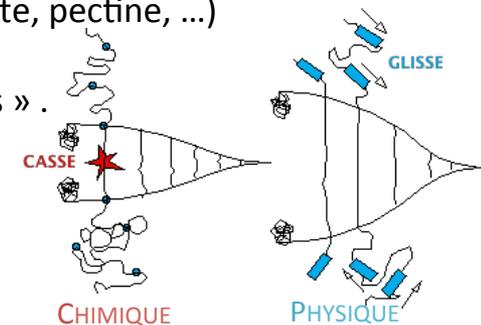


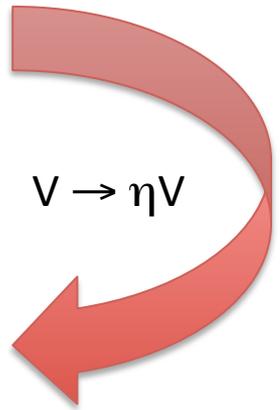
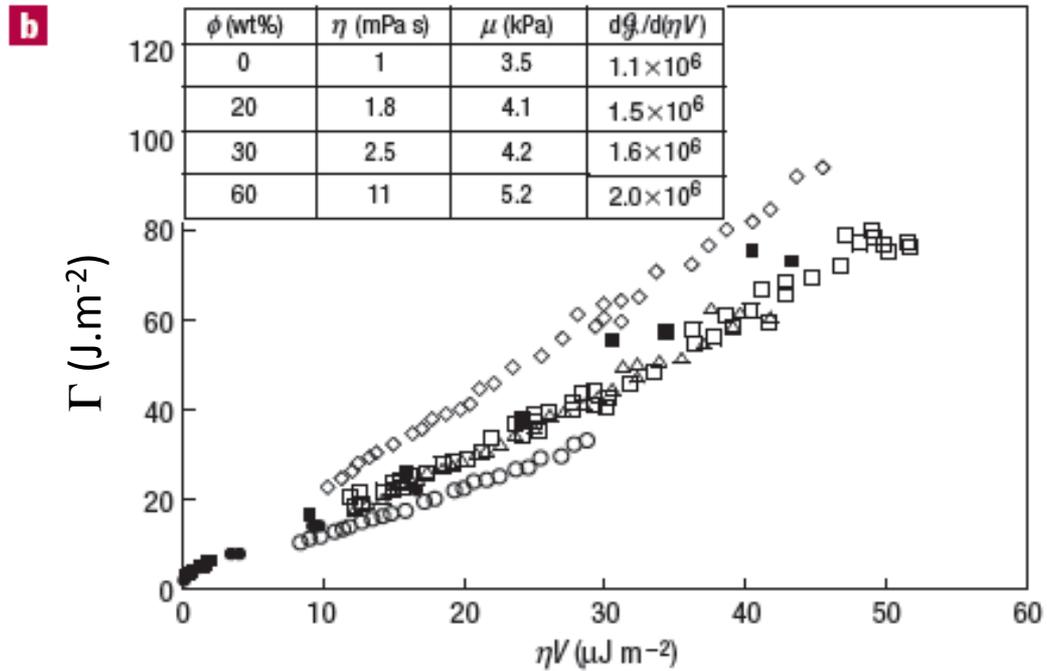
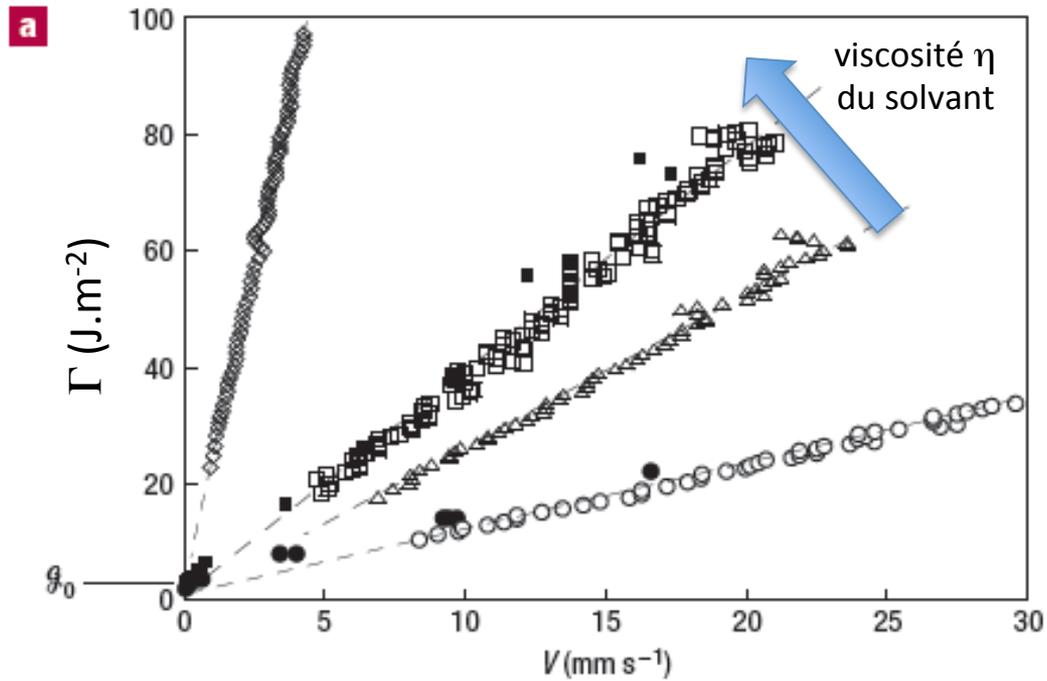
$\xi \approx 10 \text{ nm}$



GÉLATINE : chaînes polypeptidiques résultant de la dénaturation du collagène

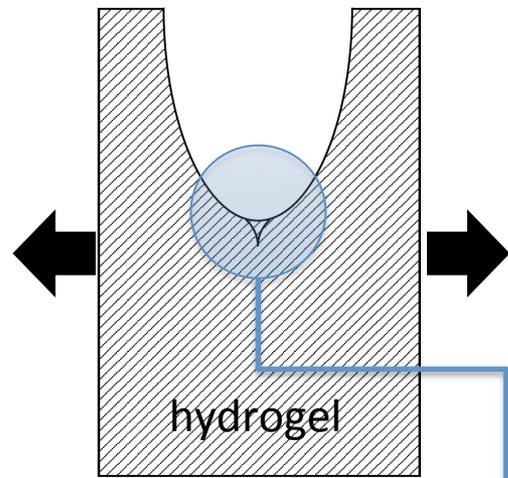
- gel thermoréversible obtenu par renaturation partielle des triple-hélices natives
- solide (poro-)élastique : réseau fortement hydraté (95% de solvant)
- archétype d'une classe de matériaux : « gels physiques » (gélatine, alginate, pectine, ...)
- Les zones de réticulation (hélices) jouent le rôle de « fusibles mécaniques ».  
Rompre = dézipper et extraire les chaînes sans les couper  
(≠ gels « chimiques » à réticulation covalente)





$$\frac{d\Gamma}{d(\eta V)} \propto 10^6 !$$

# MODÉLISATION DE LA « ZONE COHÉSIVE »



DUGDALE

$$\Gamma = \sigma_Y \times \delta_{\max}$$

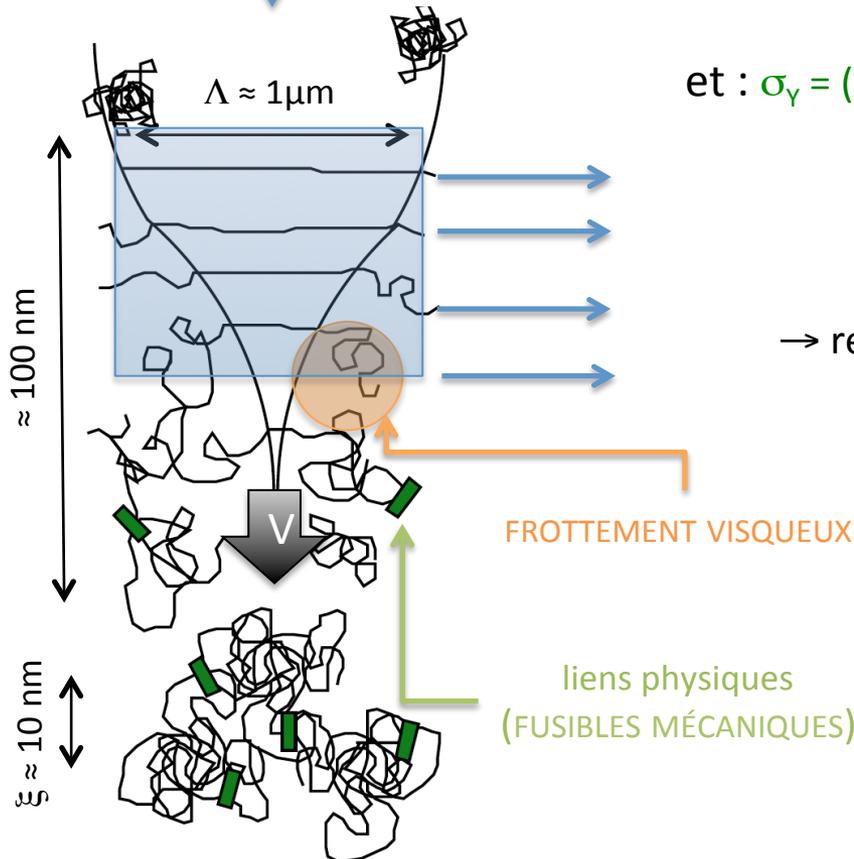
ici :  $\delta_{\max} \approx \Lambda$  (longueur de la chaîne étirée)

$$\text{et : } \sigma_Y = (f_{\text{unzip}} + f_{\text{visco}}) / \xi^2$$

tête  
de fracture

zone  
de process

réseau  
hydraté

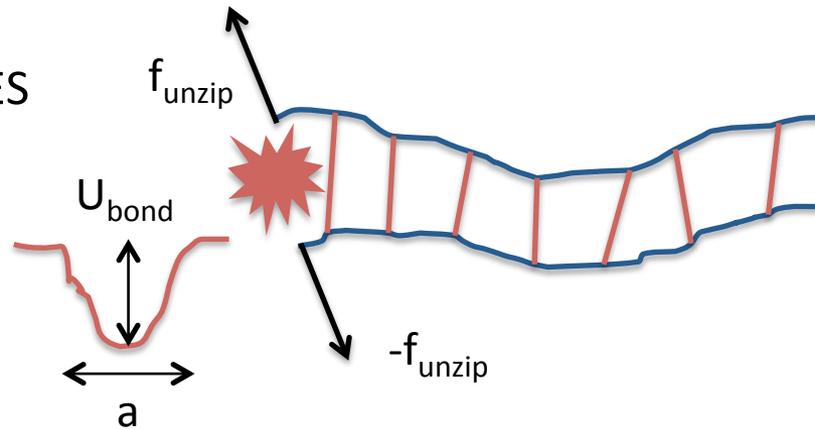


→ reste à estimer les forces sur les chaînes...

# FORCE MOYENNE SUR LES CHAÎNES

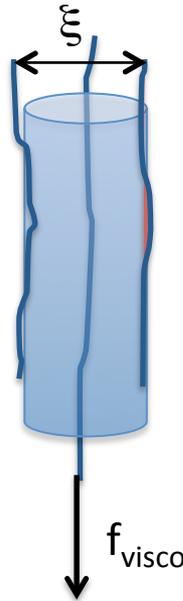
- dézippage de la triple hélice

$$\rightarrow f_{\text{unzip}} \approx U_{\text{bond}}/a$$



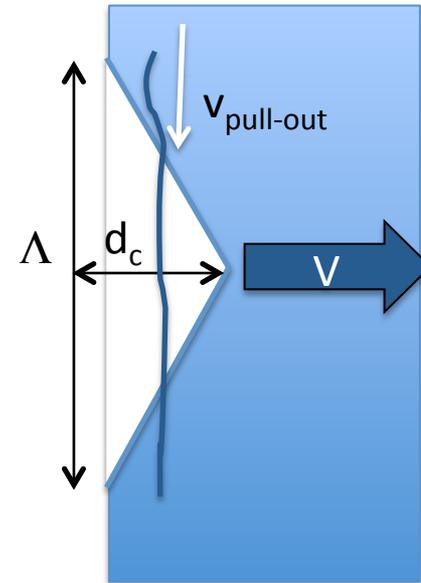
- extraction hors de la matrice

$$\rightarrow f_{\text{visco}} \approx \eta(v_{\text{pull-out}}/\xi) 2\pi\xi\Lambda$$



- vitesse d'extraction

$$\rightarrow v_{\text{pull-out}} = V \left. \frac{du}{dx} \right|_{\text{tip}} = \alpha V \quad (\alpha \approx \Lambda/d_c \gg 1)$$

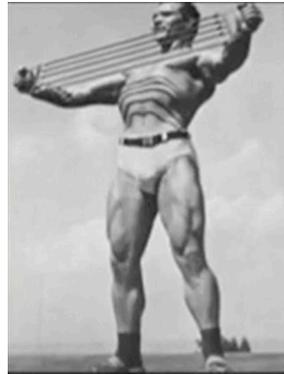
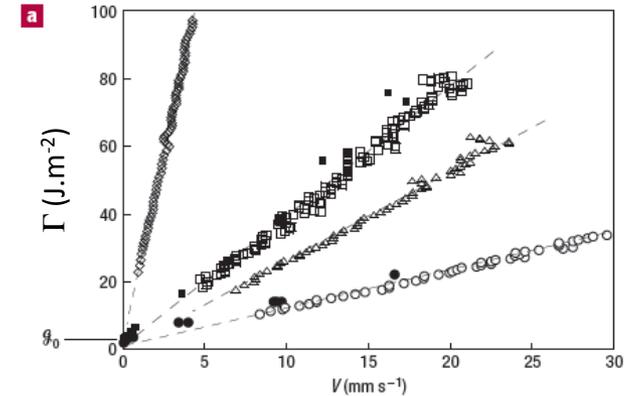


# FACTEURS D'AMPLIFICATION ET ORDRES DE GRANDEUR

*in fine...*

$$\Gamma(V) = \frac{U_{\text{bond}}}{\xi^2} \frac{\Lambda}{a} + \alpha' \left( \frac{\Lambda}{\xi} \right)^2 \eta V$$

$N_{\text{monomères}} \gg 1$        $\gg 1$



$\Gamma_0 \approx 1 \text{ J/m}^2$   
(idem verre)

$\Delta\Gamma_{\text{visc}} \approx 10^6 \eta V$   
devient rapidement  $\gg \Gamma_0$

et pourtant...  
il y a 95% d'eau dans le gel !

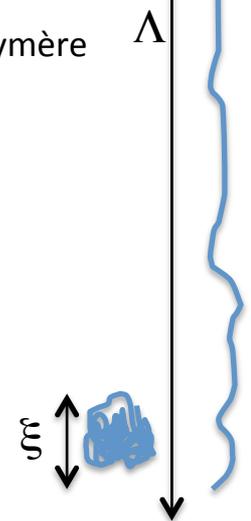
Chacun des  $\Lambda/a$  monomères est à même de passer la barrière  $U_{\text{bond}}$   
L'énergie élastique  $N_{\text{monomères}} U_{\text{bond}}$  stockée dans la chaîne n'est pas récupérable.

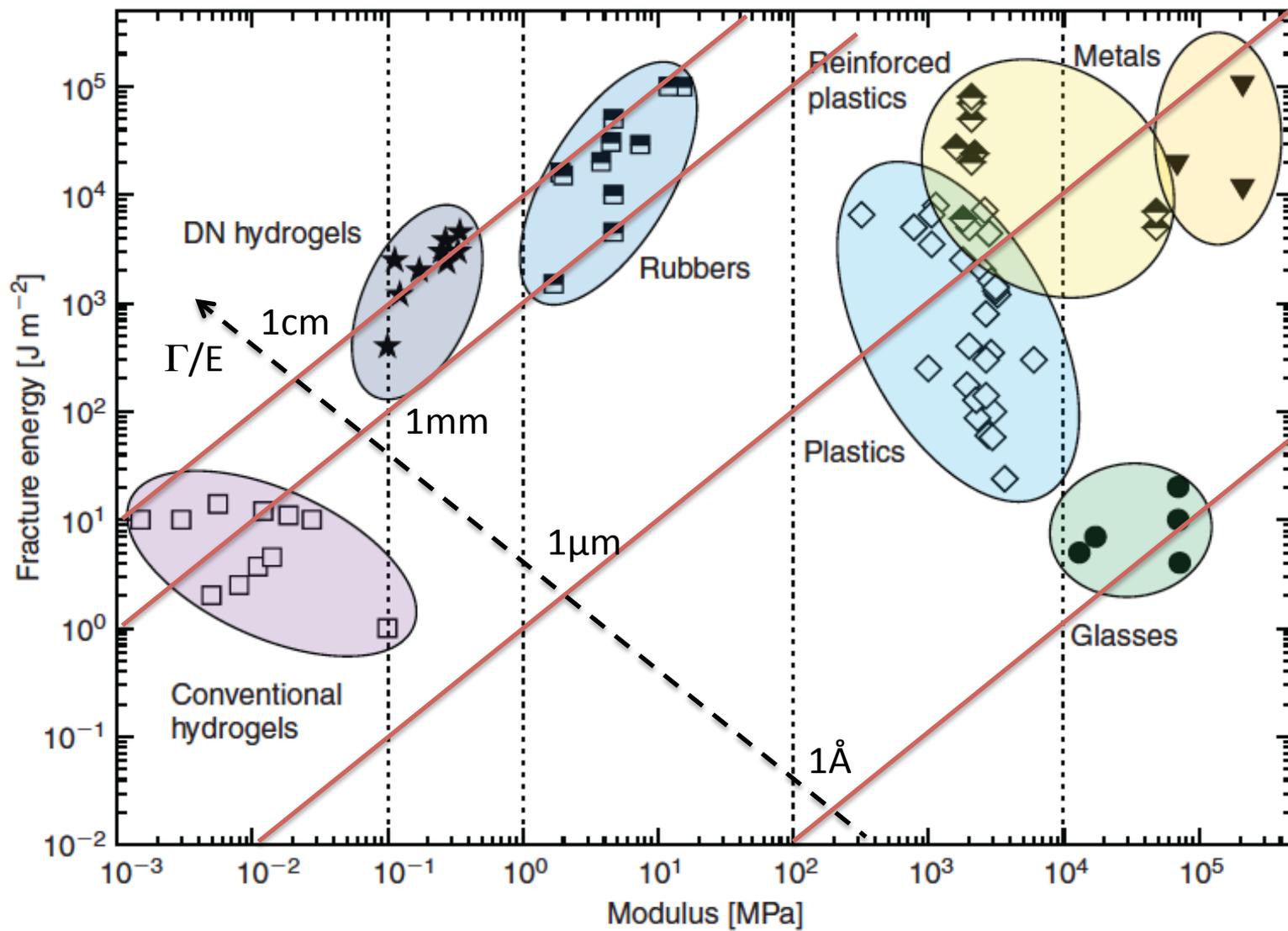
$\Lambda$  est la longueur de contour du polymère  
 $\xi$  est la taille de la pelote statistique

- gélatine à 5%
- $\Gamma_0 \approx 0.6 \text{ J/m}^2$
- $U_{\text{bond}} \approx 0.2 \text{ eV}$  (2H-bonds)
- $\xi \approx 10 \text{ nm}$
- $a \approx 0.3 \text{ nm}$
- $\Lambda = 600 \text{ nm}$

$$\sigma_0 \approx 1 \text{ MPa} \gg E \left( \frac{k_B T}{\xi^3} \approx 10 \text{ kPa} \right)$$

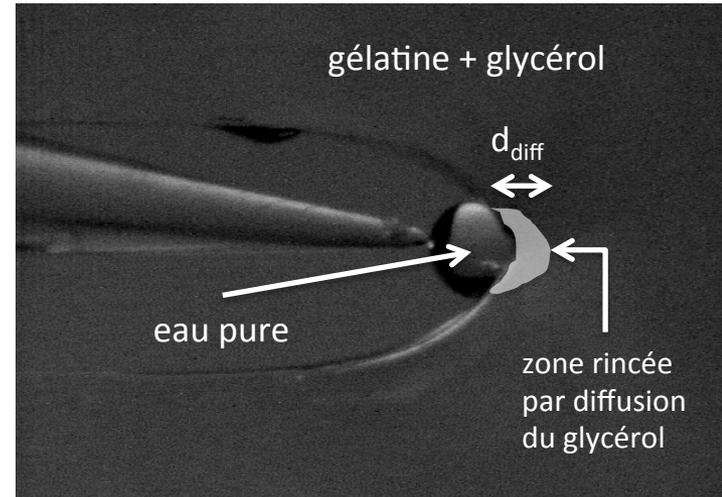
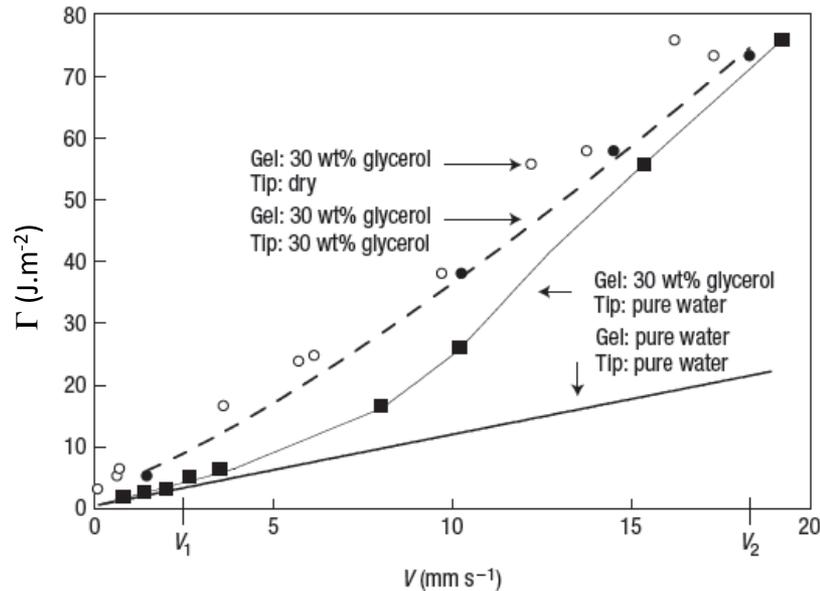
*configuration propice à l'é mousse élastique*





# ESTIMATION EXPÉRIMENTALE DE LA TAILLE DE LA ZONE COHÉSIVE

## HIERARCHIE DES ÉCHELLES DE LONGUEUR



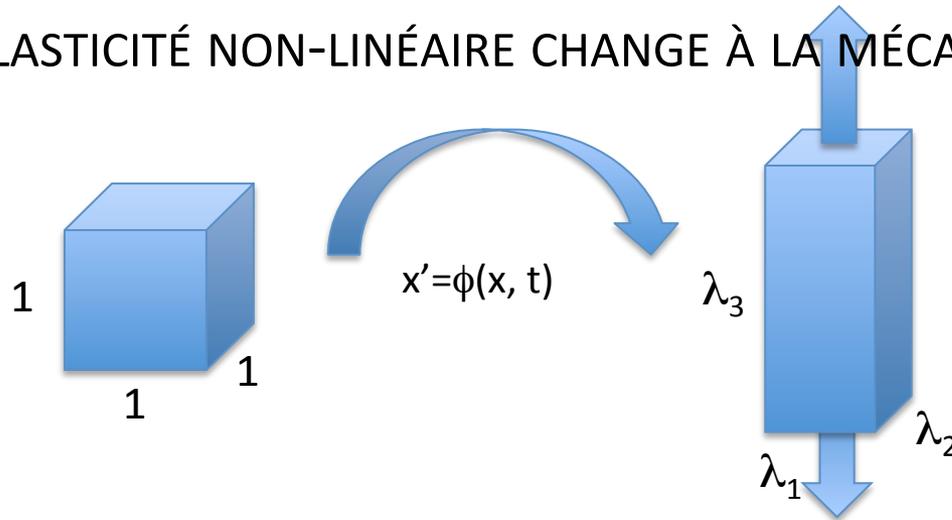
épaisseur de peau :  $d_{diff} \approx D_{gly/eau}/V$

$$\begin{aligned} d_{diff}(V_1) &\approx d_c & \Rightarrow & d_c = \xi V_2/V_1 \approx 100 \text{ nm} \\ d_{diff}(V_2) &\approx \xi & & \alpha \approx \Lambda/d_c \approx 10 \end{aligned}$$

$\mathcal{L} = \Gamma/E \approx 100 \mu\text{m} - 10 \text{ mm}$

$a$	$<$	$\xi$	$<$	$d_c$	$<$	$\Lambda$	$<$	$\mathcal{L}$	$<$	$h$
nm		10 nm		100 nm		$\mu\text{m}$		mm		cm

# CE QUE L'ÉLASTICITÉ NON-LINÉAIRE CHANGE À LA MÉCANIQUE DE LA FRACTURE



$$F_{ij} = \partial_i \phi_j = \delta_{ij} + \partial_i u_j$$

$$S_{ij} = \partial \mathcal{W} / \partial F_{ij}$$

$$S_3 = f_3 / (1 \times 1) \text{ nominal stress}$$

$$T_3 = f_3 / (\lambda_1 \lambda_2) \text{ true stress}$$

$$J = \mathcal{G}V = \int_C [(\mathcal{W} + \frac{1}{2} \rho \partial_t u_i \partial_t u_j) V n_x + S_{ij} n_j \partial_t u_i] dC$$

- solide linéaire hookéen

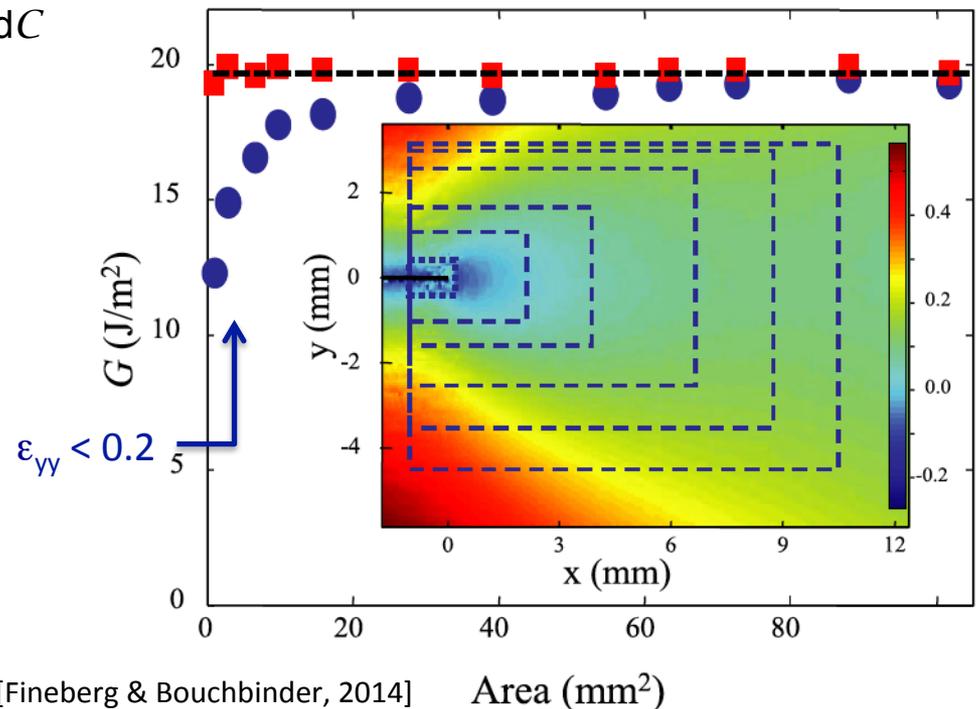
$$\mathcal{W}_H(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{E}{2} [\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2]$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$$

- solide « néo hookéen »

$$\mathcal{W}_{NH}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\mu}{2} [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3]$$

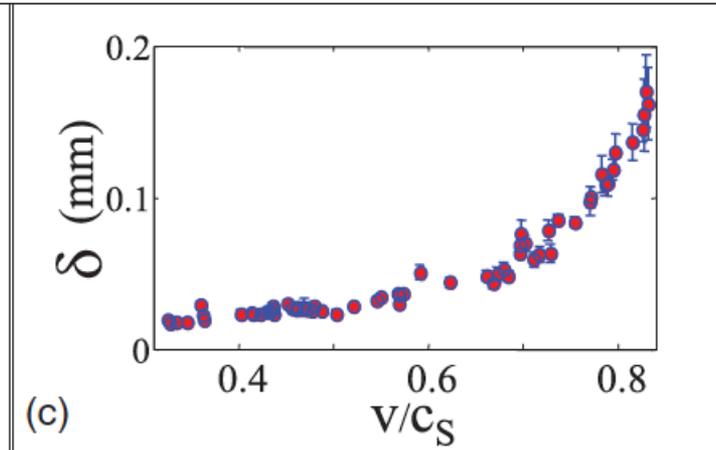
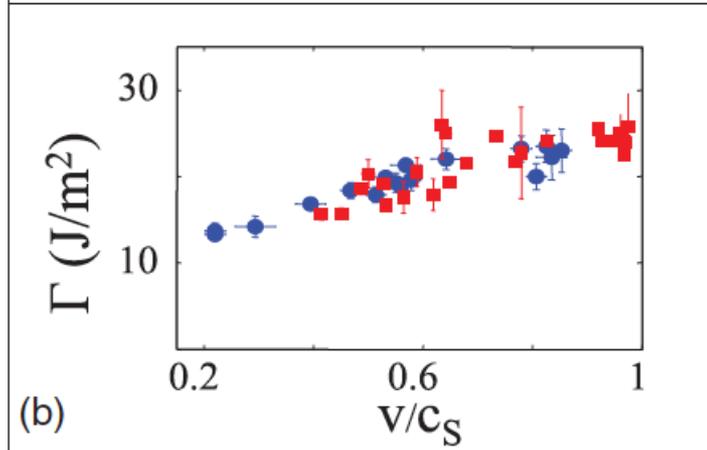
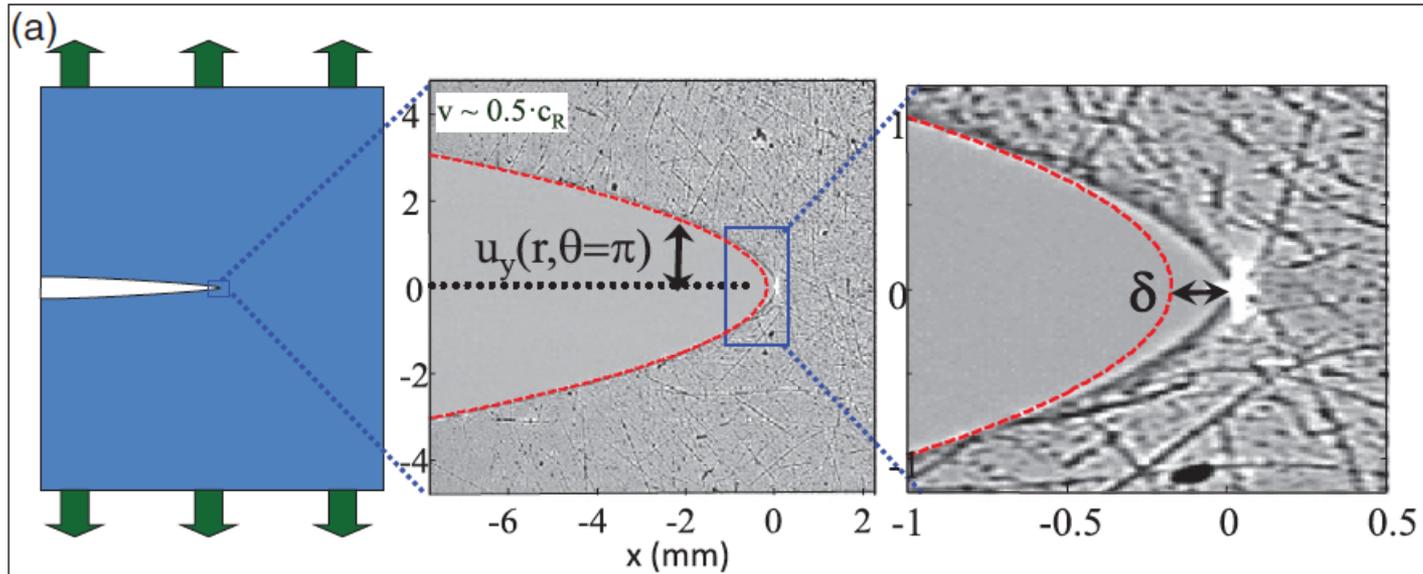
$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$



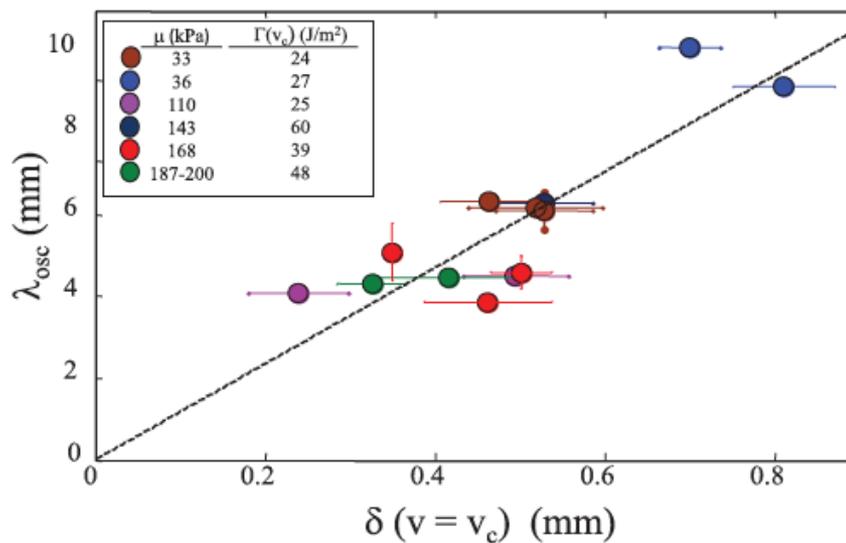
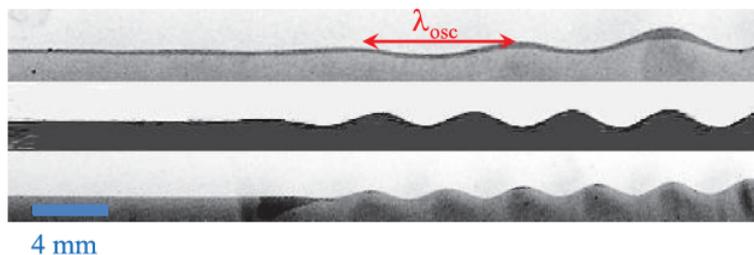
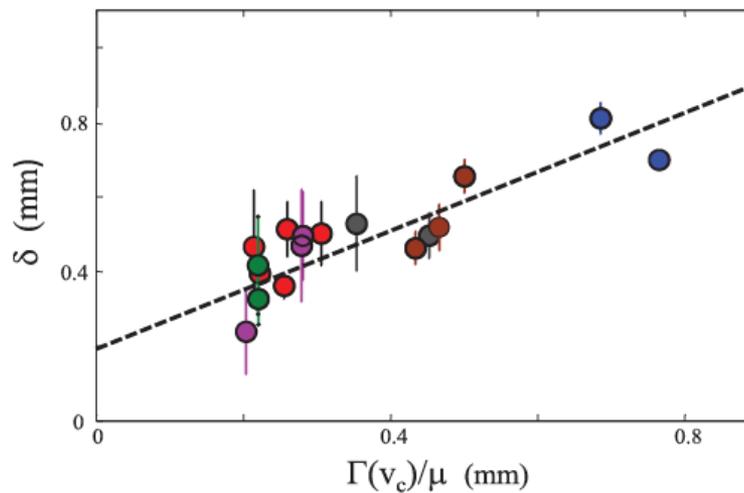
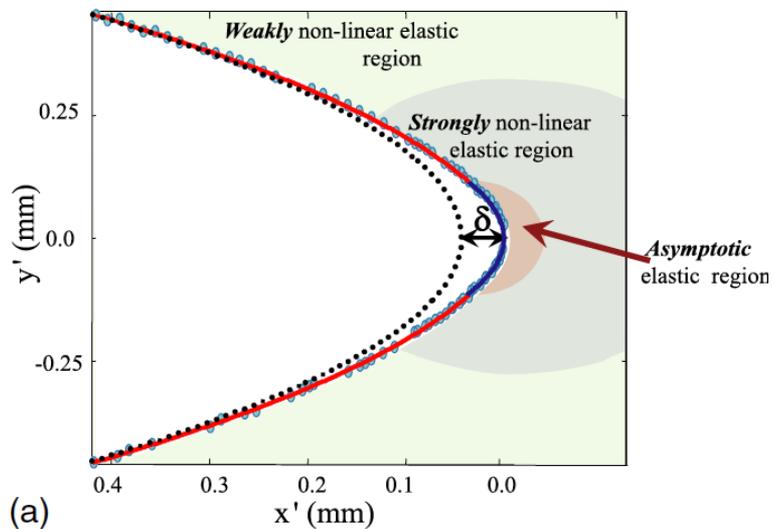
[Fineberg & Bouchbinder, 2014]

Area (mm<sup>2</sup>)

# L'ÉCART AU PROFIL LEFM DÉFINIT UNE LONGUEUR



# COHÉRENCE ENTRE LES DIFFÉRENTES LONGUEURS



# QUE DEVIENT LE CHAMP DE CONTRAINTE EN TÊTE ?

champ asymptotique ( $r \ll \mathcal{L}$ ), quasi-statique,  
pour un solide néo-hookéen (Geubelle & Knauss, 1994)

$$T_{11} = \mu C_1^2, \quad T_{22} = \mu C_2^2 / 4r$$

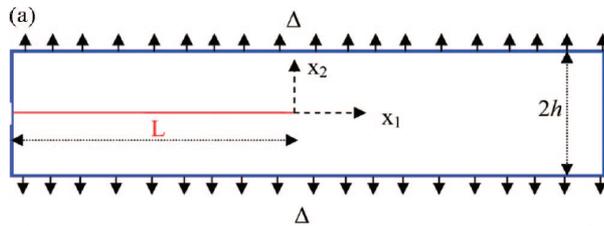
$$T_{12} = T_{21} = -\frac{\mu C_2 C_1}{\sqrt{2r}} \sin(\theta/2)$$

vs.

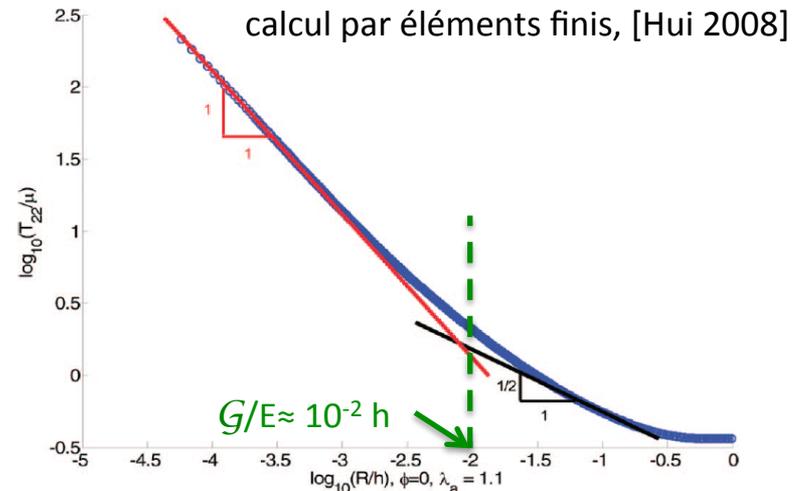
$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{pmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{pmatrix}$$

→ Le champ de contrainte (vraie) en tête devient essentiellement *uniaxial*

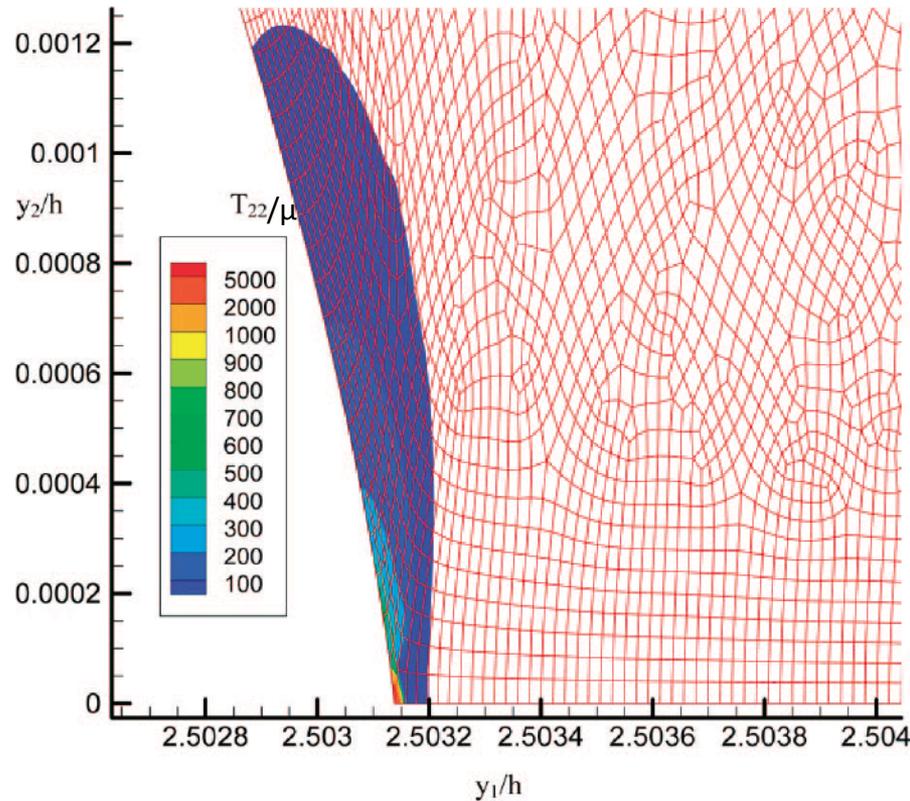
→ La pointe reste parabolique



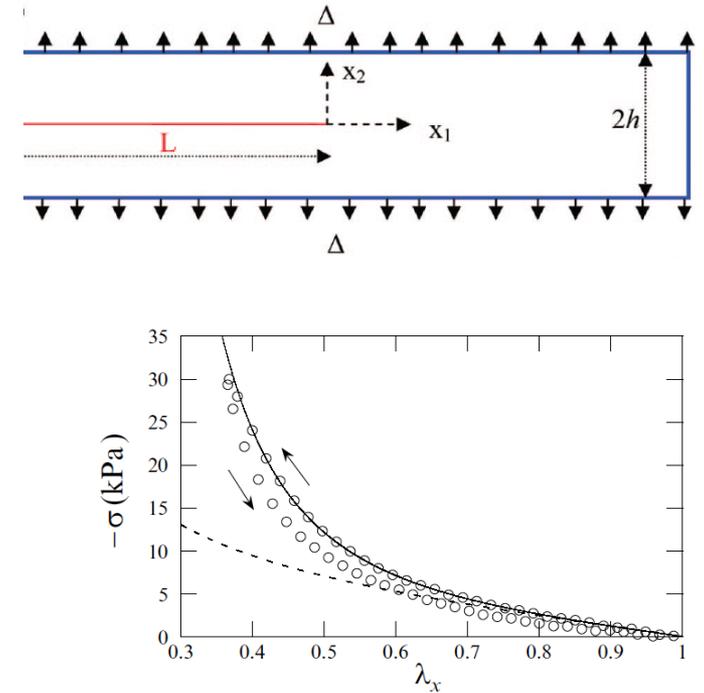
$$\mathcal{G} = \mu h \left[ \lambda_a - \frac{1}{\lambda_a} \right]^2 \quad \text{avec } \lambda_a = \Delta/h$$



# UNE SOURCE D'INSTABILITÉ DE BRANCHEMENT ?

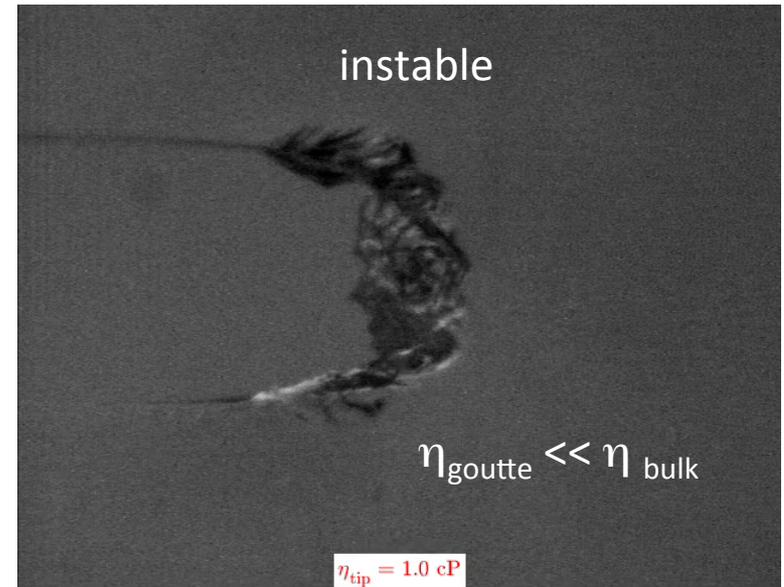
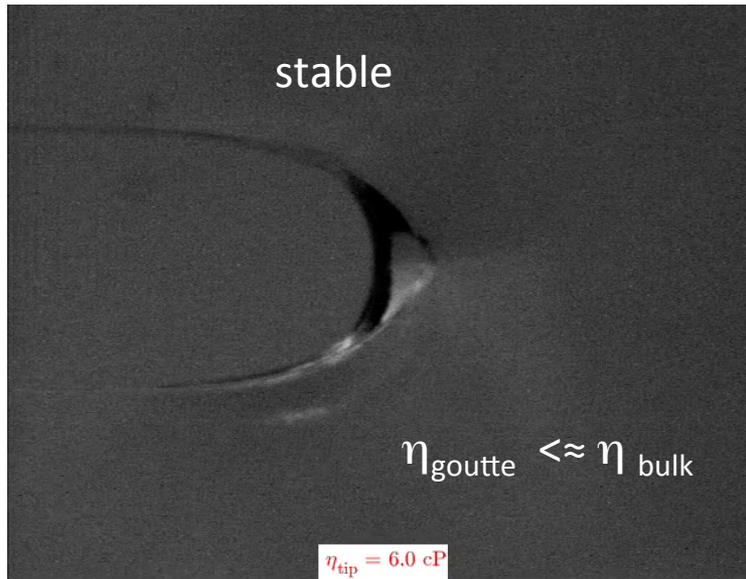


**Figure 11.** Normal opening stress ( $T_{22}$ ) contour with FEM mesh is shown near the crack tip for  $\lambda_a = 1.1$  in exponentially hardening solid ( $I_m = 3.5$ ). The region where  $T_{22}$  is high is along the crack face rather than directly ahead of the crack tip, which suggests that **secondary cracks may initiate from the crack face.**

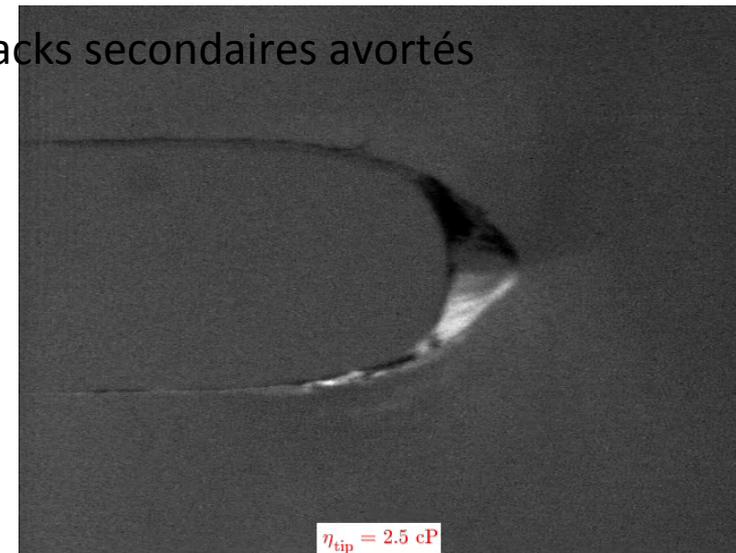
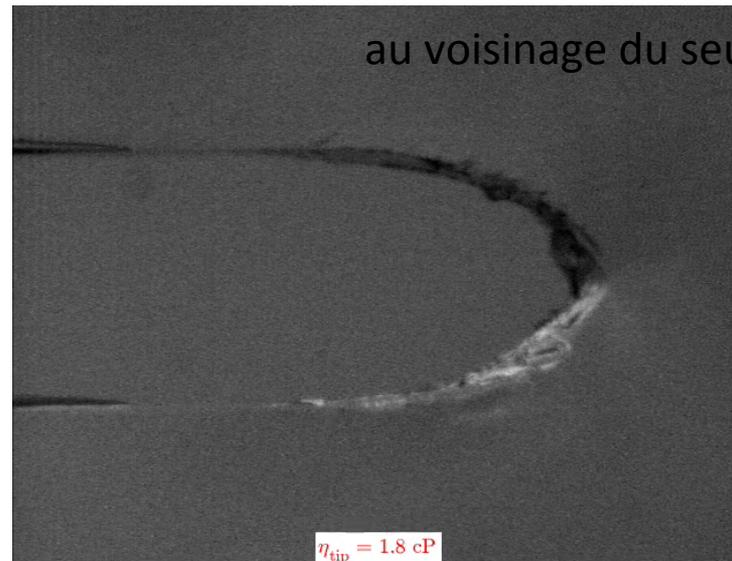


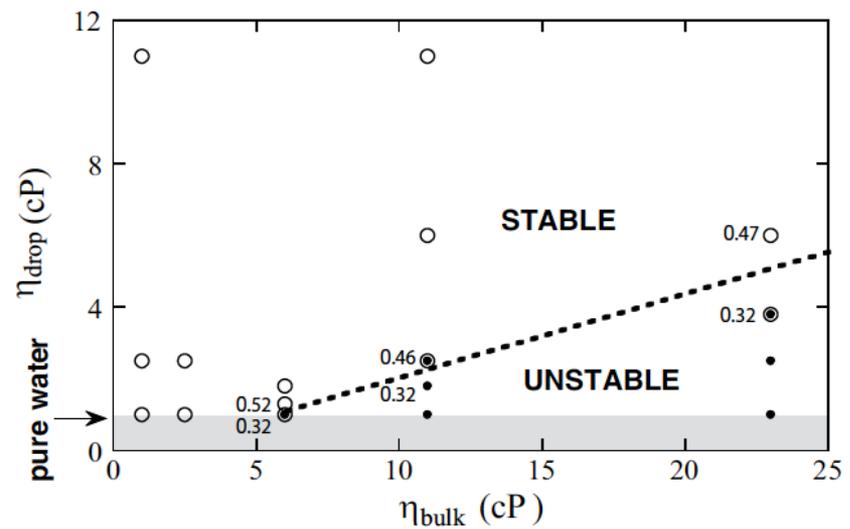
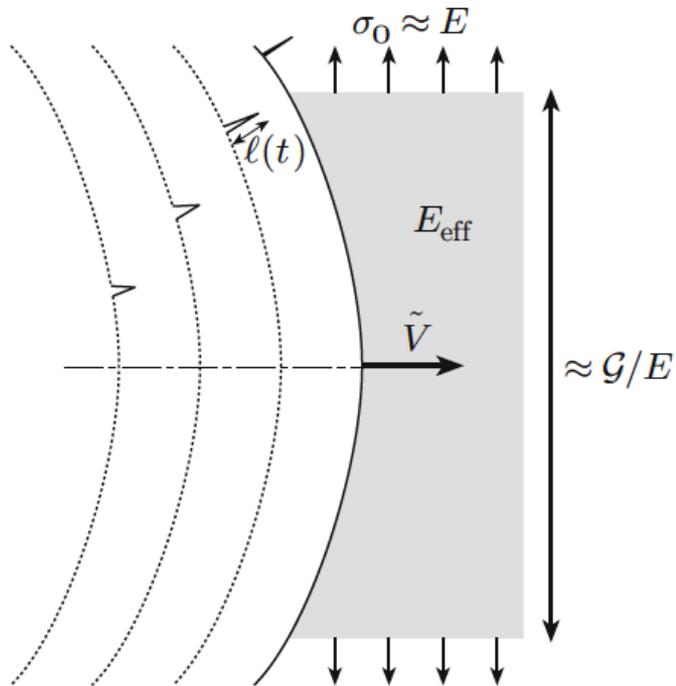
**Fig. 1.** Non-linear elastic response of a cylinder of gelatin gel (5 wt.% in 60%–40% glycerol-water solvent) in uniaxial compression between well-lubricated plates.  $\sigma$  is the true (Cauchy) stress and  $\lambda_x$  is the compression ratio. The solid curve is a fit using a strain energy density  $W_{SH}$  (see text) with  $J_m = 2.3$ . The initial slope ( $\lambda_x \lesssim 1$ ) yields the Young modulus  $E = 12.1$  kPa. The dashed line corresponds to the neo-Hookean elastic solid with the same small strain modulus. The small hysteresis between loading and unloading curves is probably indicative of slow stress relaxation [17] during the 6 s duration of the cycle.

# INSTABILITÉ EXPLOSIVE DÉCLANCHÉE PAR UNE GOUTTE D'EAU...



viscosité bulk : 11 cP





$\mathcal{L} \approx \text{mm}$

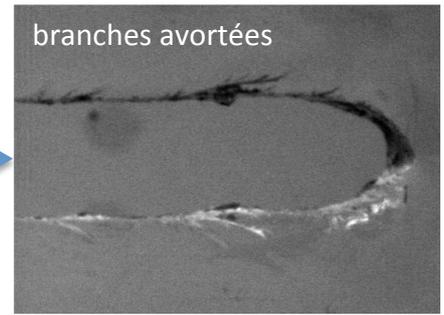
$$G = \beta E l = \Gamma_0 + \gamma \eta_{\text{branch}} \frac{dl}{dt} \longrightarrow l_0 > l_c = \frac{\Gamma_0}{\beta E} \Rightarrow l(t) = l_0 \exp \frac{t}{\tau}$$

$$\beta \approx E/E_{\text{eff}} \ll 1$$

$$\tau = \gamma \eta_{\text{branch}} / \beta E$$

instabilité (convective)  
si  $\tau < \mathcal{L}/V$  i.e. si  $\eta_{\text{branch}}/\eta_{\text{tip}} > \beta$

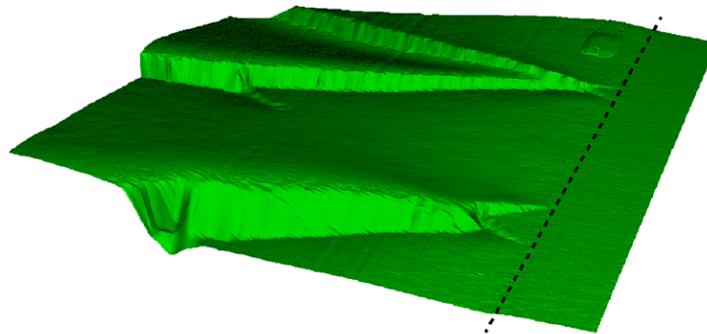
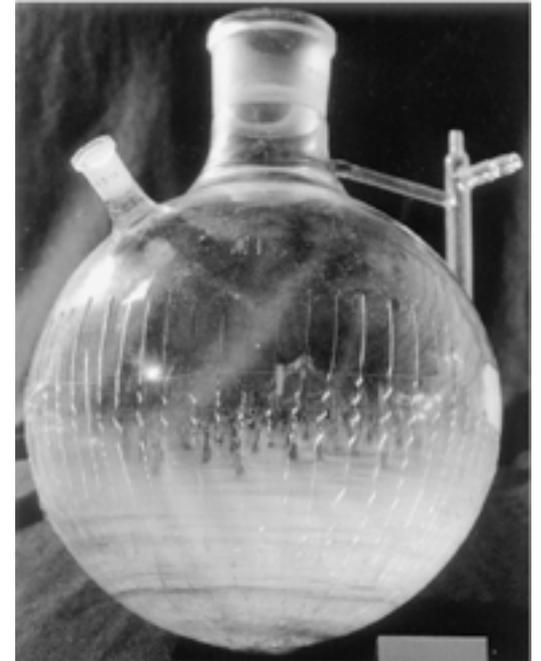
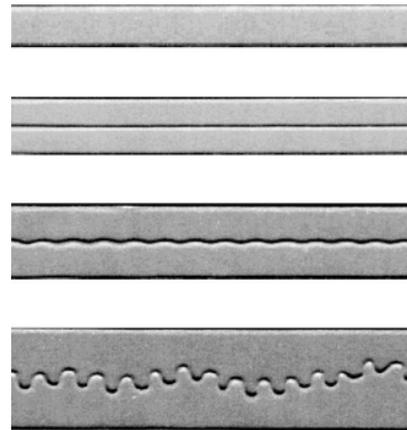
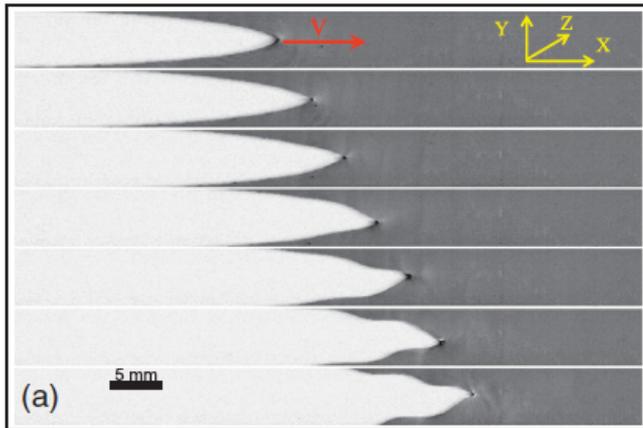
NB.  $\eta_{\text{branch}} \approx \eta_{\text{drop}}$   
mais  $\eta_{\text{tip}} = \eta_{\text{bulk}} f(V/Dd_c)$  dépend non-trivialement de  $V$ .



les résultats sont compatibles avec  $\beta \approx 0.3$  i.e.  $l_0 > l_c = 3\Gamma_0 / E \approx 200 \mu\text{m}$   
à cette distance ( $\approx \mathcal{L}/10$ ) le strengthening n'est peut être pas très important

# INSTABILITÉS DE CHEMINS DE FRACTURE

oscillations, fragmentations...



# UNE INSTABILITÉ INHABITUELLE DE CHEMIN DE FRACTURE

[TB *et al.* inédit]

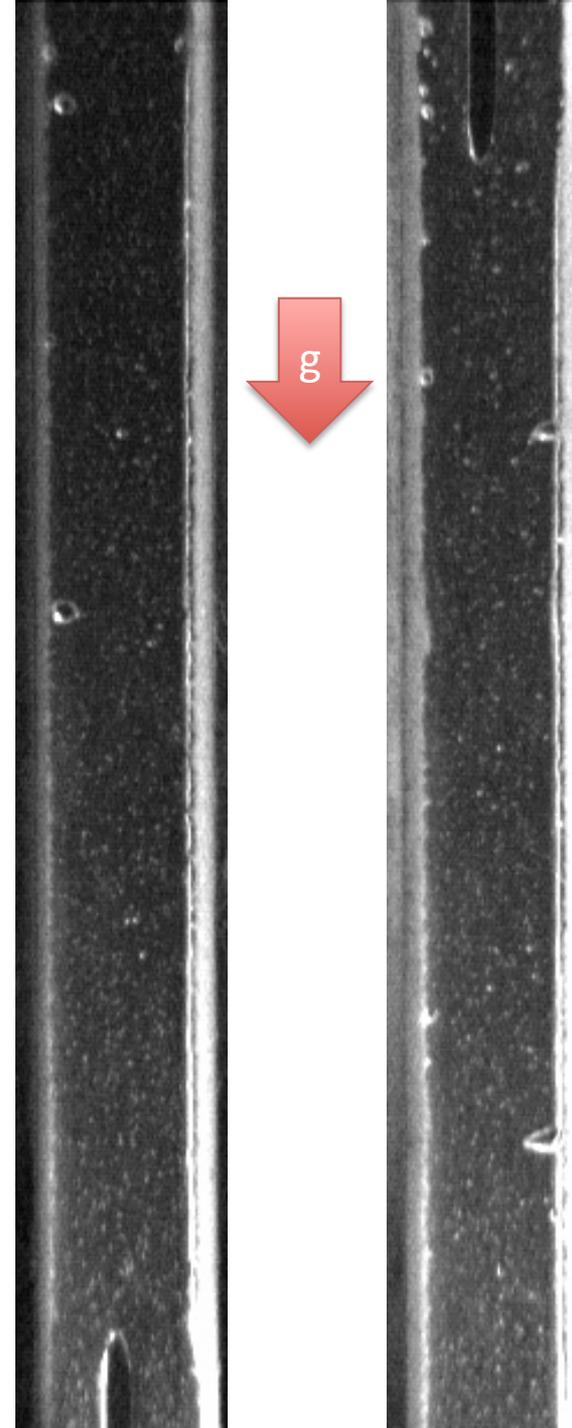
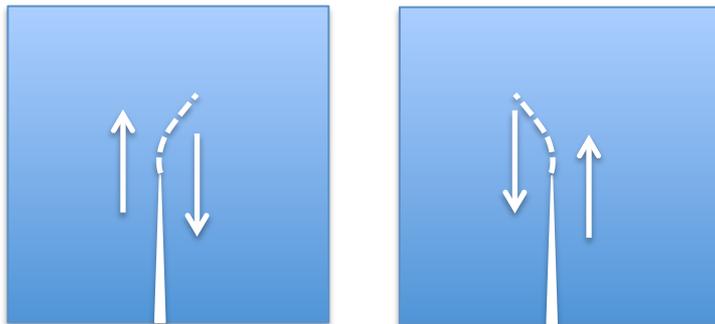
→ pour un crack vertical dans de la gélatine,  
la gravité joue un rôle !

→  $G(\Delta) = \Gamma(V)$  ne suffit pas à prédire le trajet du crack

→ En LEFM, l'orientation du crack doit être déterminée par les  $K_i$  :

en pratique :  $K_{II} = 0$  (critère de « symétrie locale »)

[ Goldstein & Salganik,1974]



# MÉCANISME DE L'INSTABILITÉ GRAVITATIONNELLE

→ champ de contrainte *en l'absence de fracture* dû à la gravité

$$u_x(y)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \frac{du_x(y)}{dy}$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}$$

$$\frac{d\sigma_{xy}}{dy} + \rho g = 0 \Rightarrow \sigma_{xy} = -\rho g y$$

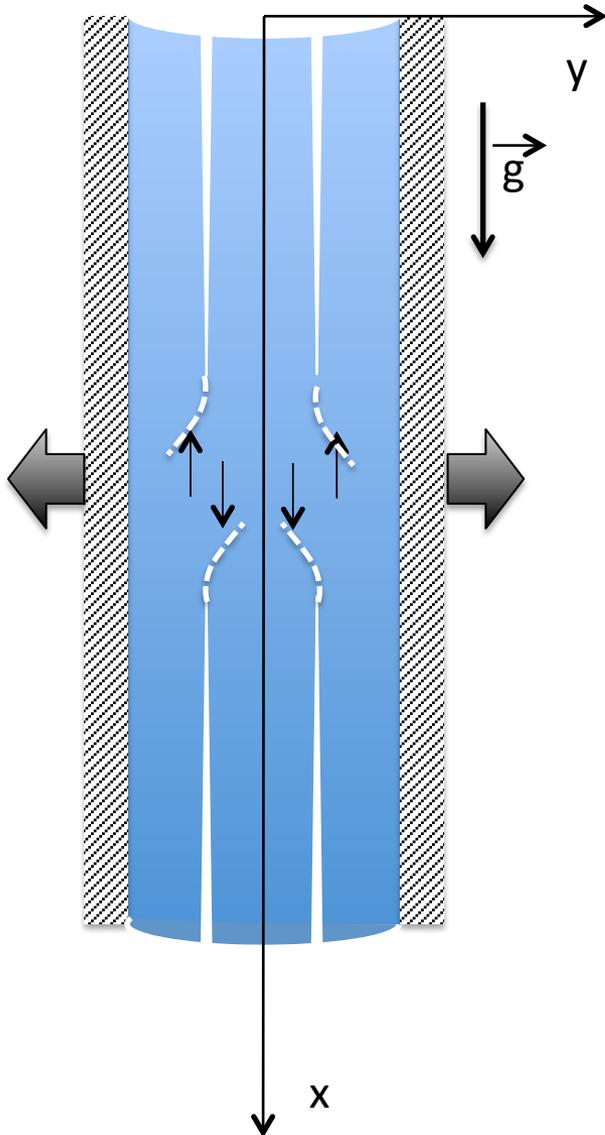
→ le cisaillement ( $K_{II}$ ) est bien **déstabilisant (stabilisant)** pour une fracture décentrée se propageant vers le bas (haut)

NB. pour déterminer la trajectoire du crack il faudrait calculer  $K_{II}$  en sa présence...

→ pour fixer les idées : on calcule la direction principale d'ouverture en  $(x, y)$  *en l'absence de crack*. Si le crack suivait cette direction on aurait :

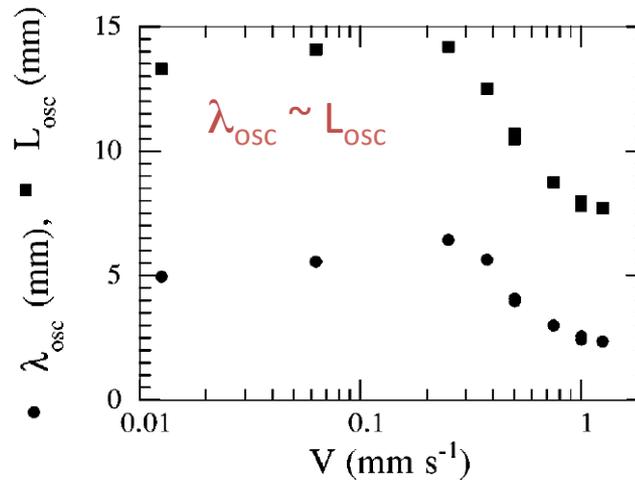
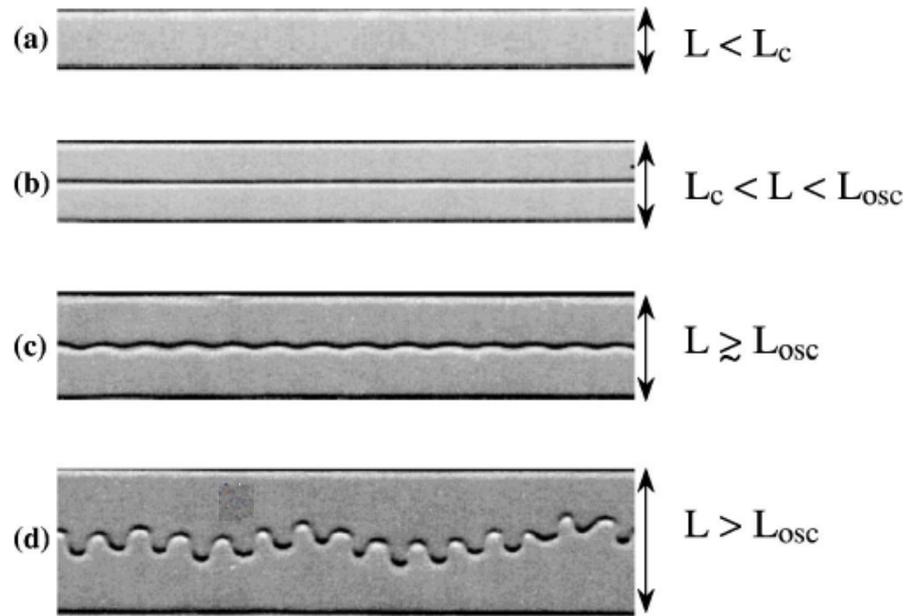
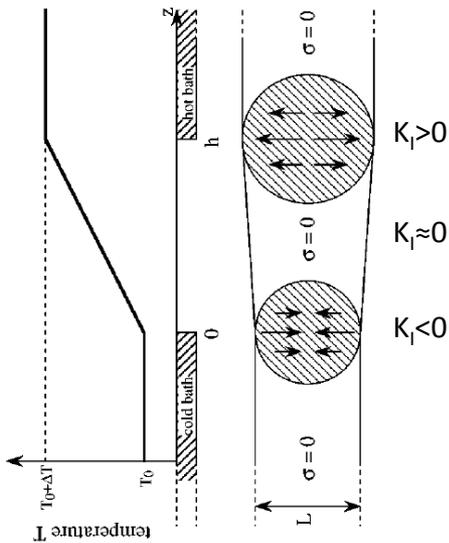
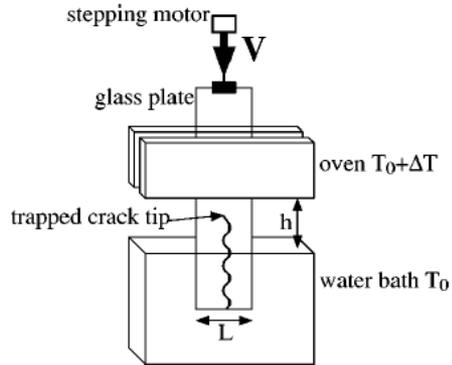
$$\frac{dY_{\text{tip}}}{dx} = \text{sgn}(V) \frac{\rho g}{\sigma_{yy}} Y_{\text{tip}} \Rightarrow Y_{\text{tip}}(x) = Y_0 \exp\left[\text{sgn}(V) \frac{x}{\Xi}\right] \text{ avec } \Xi = \frac{\sigma_{yy}}{\rho g}$$

- gélatine :  $\sigma_{yy} \approx 1\text{kPa} \Rightarrow \Xi \approx 10\text{ cm}$  (échelle du labo)
- roche :  $\sigma_{yy} \approx 100\text{ MPa} \Rightarrow \Xi \approx 10\text{ km}$  (échelle géologique)



# INSTABILITÉ OSCILLANTE EN FRACTURE DIRECTIONNELLE

[O. Ronsin, Thèse (1996)]



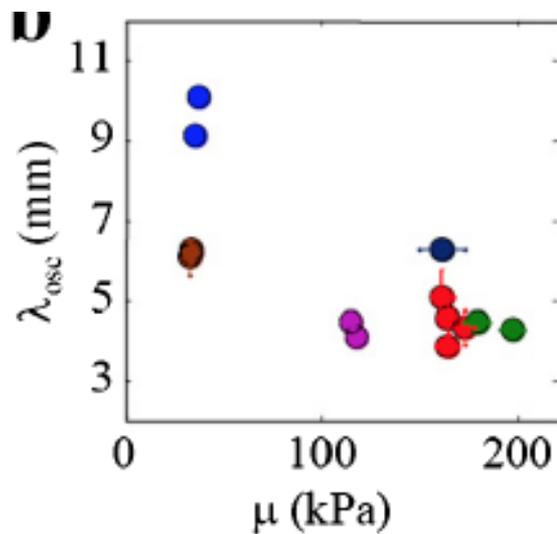
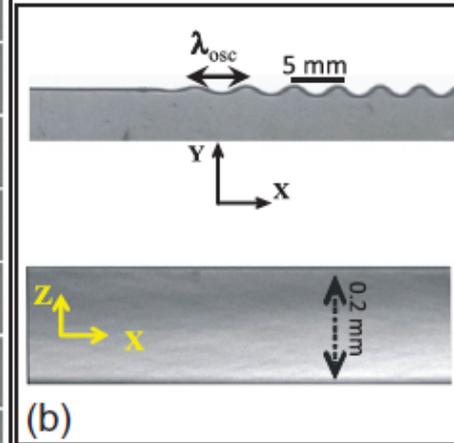
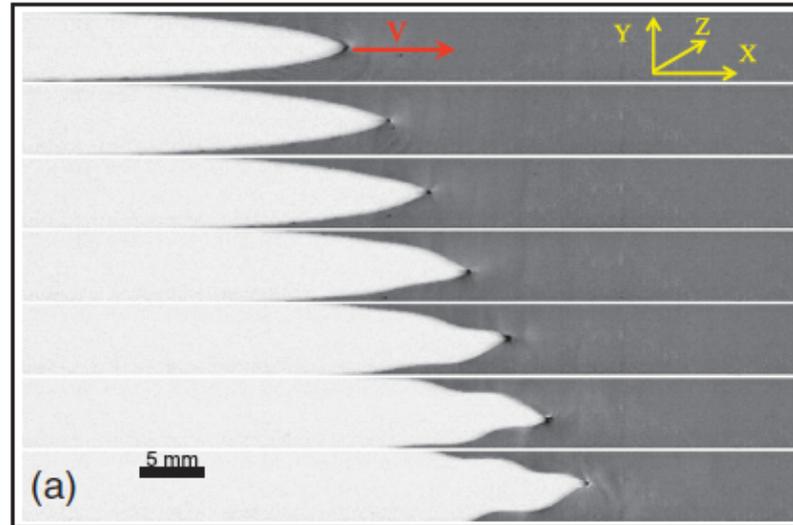
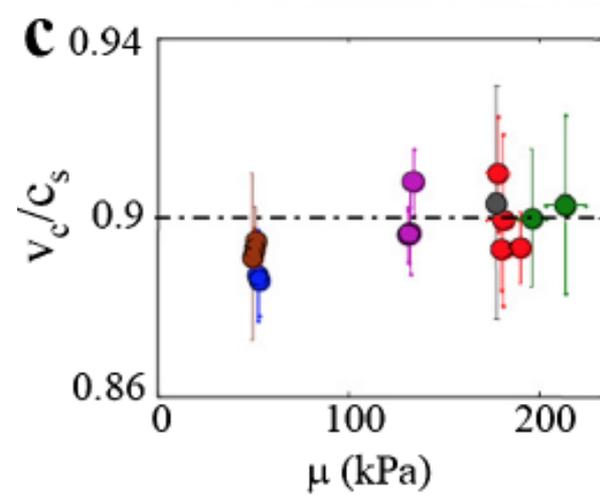
→  $\lambda$  est géométrique  
et macroscopique

→ l'ensemble du phénomène est compatible avec un critère quasi-statique  $K_{II} = 0$

# INSTABILITÉ OSCILLANTE EN FRACTURE RAPIDE

[LIVNE, BEN-DAVID, FINEBERG, PRL 98]

Gels chimiques (fragiles) de polyacrylamide, ultra-minces



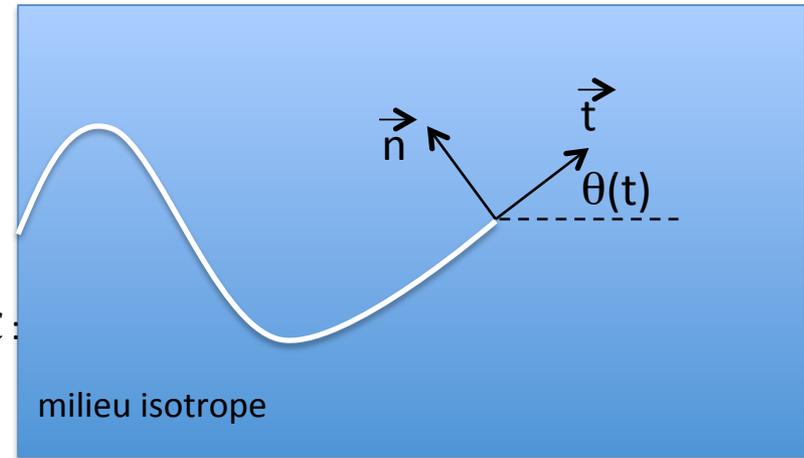
→  $\lambda$  ne semble pas être purement géométrique  
→ on a vu que  $\lambda \sim \mathcal{L}$

# INSTABILITÉ DYNAMIQUE ET PERTINENCE DE LA LONGUEUR NON-LINÉAIRE $\mathcal{L}$

[E. Bouchbinder, *Phys. Rev. E* 2009]

→ écrire des équations du mouvement du crack qui préservent son autonomie :

$$\frac{\partial \vec{r}_{\text{tip}}}{\partial t} = v(K_I, K_{II}) \vec{t} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = f(K_I, K_{II})$$



→ expression la plus simple pour  $f$ ,  
respectant les symétries du problème  
et prenant en compte une échelle de longueur mésoscopique  $\mathcal{L}$  :

$$f \equiv K_{II}[\vec{r}_{\text{tip}}(t)] = \frac{v}{\mathcal{L}} \frac{K_{II}}{K_c}$$

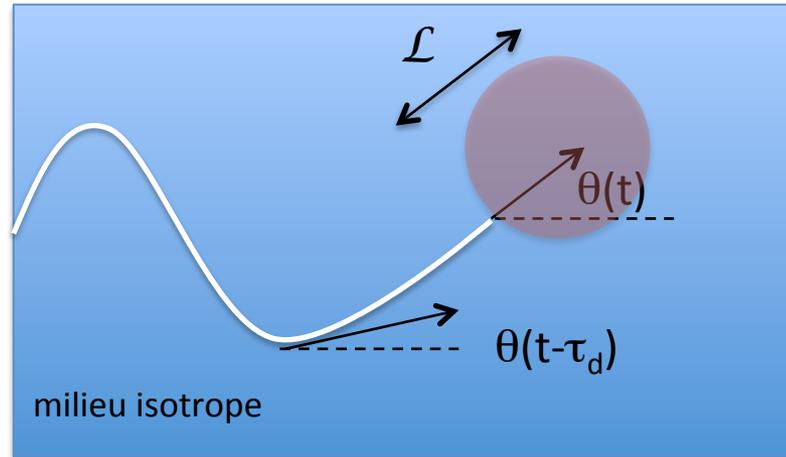
→ en quasistatique :  $\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{K_{II}}{K_I}$

on observe généralement que  $\partial \theta / \partial s \approx 1/L$  (macro) d'où  $K_{II}/K_I \approx \mathcal{L}/L \ll 1$  (LEFM) compatible avec  $K_{II} = 0$

→ en dynamique : le champ élastique met un certain temps à s'adapter (vitesse du son  $c$  finie)

Hyp.

→  $K_{II}(t)$  correspond au champ en  $r_{\text{tip}}(t)$  calculé par LEFM lorsque le crack était en  $r_{\text{tip}}(t - \tau_d)$   
avec  $\tau_d = \mathcal{L}/c$ , où  $c \approx c_S$



$$K_{\text{II}}(t) \simeq \mathcal{K}_{\text{I}}(t - \tau_d) \Sigma_{r\varphi}^{\text{I}}(\varphi = \theta(t) - \theta(t - \tau_d), v) + \mathcal{K}_{\text{II}}(t - \tau_d) \Sigma_{r\varphi}^{\text{II}}(\varphi = \theta(t) - \theta(t - \tau_d), v), \quad (7)$$

NB.  $\mathcal{K}_{\text{I}}$  et  $\mathcal{K}_{\text{II}}$  doivent être calculés *en présence du crack perturbé*

→ les interactions élastiques sont à longue portée :

→ la perturbation contient des termes non locaux [Movchan & Willis]

pour un front peu perturbé par rapport au plan et en laissant tomber le terme non-local...

→ *in fine* on trouve, au premier ordre en  $\theta$ , une relation de la forme :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{V}{\mathcal{L}} [A(V)\theta(t) - B(V)\theta(t - \tau_d)]$$

→ on étudie la stabilité linéaire du crack rectiligne ( $K_{II} = 0$ )...

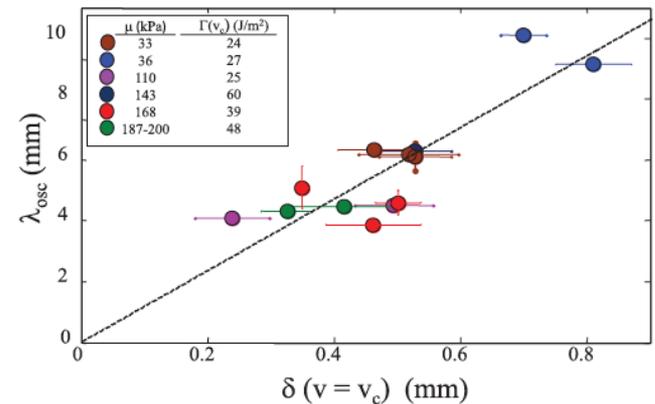
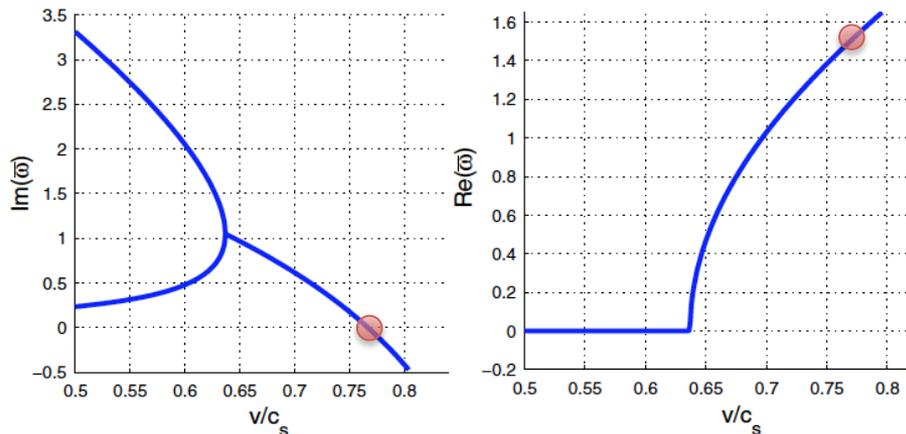
$\theta(t) = \Theta \exp i\omega t$  avec  $\Theta \ll 1$  et  $\omega$  complexe tel que  $\Re(\omega) = 2\pi V/\lambda$

$$i\omega\tau_d = -\frac{V}{c} [A(V) - B(V)\exp(-i\omega\tau_d)]$$

→ une instabilité oscillante ( $\Im(\omega) < 0$  et  $\Re(\omega) \neq 0$ ) apparaît pour  $V > V_c = 0.77 c_s$

(dépend peu des caractéristiques du matériau)

$$V_c^{\text{exp}} = 0.87 c_s$$



→ la période des oscillations au seuil est  $\lambda_c = 2\pi/\Re(\omega\tau_d)_c V_c\tau_d \approx \mathcal{L}$

# FRAGMENTATION D'UN FRONT DE FRACTURE EN MODE MIXTE I + III

« ÉCHELON CRACKS »



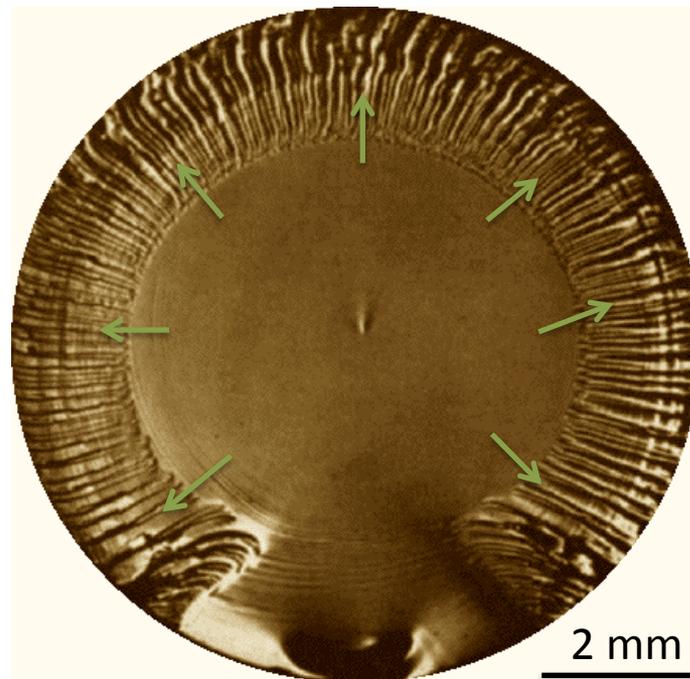
TB : Pointe du Bile (Morbihan)

GRANITE



D. Pollard : Valley of Fire State Park (Southern Nevada)

GRÈS



E. Sommer, *formation of fracture 'lances' in glass* (1969)

VERRE